

10.09.15

88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ה – מועד ב'

מרצים: דר' מצרי אליהו, דר' אליהו-רובינסון מיטל, מר ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 6 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על דפי הבחינה בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	
6	
סה"כ	

חלק א'

1. (20 נק') הוכיחו את המשפט הבא:

יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית, ויהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V .

יהיו $w_1, \dots, w_n \in W$ וקטורים כלשהם (לאו דווקא שונים). הוכיחו כי קיימת העתקה

לינארית יחידה $T: V \rightarrow W$ כך ש $\forall 1 \leq i \leq n: Tv_i = w_i$.

2. (20 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. נסמן $U = N(A+I)$ ו $W = N(A-I)$.

א. (10 נק') הוכיחו כי $U+W \subseteq N((A-I)(A+I))$

עוד נניח כי $U+W = \mathbb{R}^n$.

ב. (5 נק') הוכיחו כי $A^2 = I$.

ג. (5 נק') הוכיחו כי $U \oplus W = \mathbb{R}^n$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

3. (10 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית כך

$$\text{Im}(T) \cap \ker(T) = \phi$$

הוכיחו כי לכל $v \in V$ קיים $w \in \text{Im}(T)$ כך ש $Tv = Tw$.

4. (20 נק') נתונים תתי מרחב וקטוריים של $\mathbb{R}_3[x]$:

$$W = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid \begin{array}{l} p(1) + 2p(0) = 0 \\ p(-1) + 2p(1) = 0 \end{array} \right\} \quad U = \text{sp} \{1 + x, x + x^3, 1 - x^3\}$$

- א. מצאו בסיס ומימד עבור U .
- ב. מצאו בסיס ומימד עבור W .
- ג. מצאו בסיס ומימד עבור $U \cap W$.
- ד. מצאו בסיס ומימד עבור $U + W$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

.5

א. (10 נק') תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $T(x, y) = (2x - 3y, \alpha x + \beta y)$

ומקיימת $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$.

מצאו את ערכי α, β .

ב. (10 נק') תהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ותהי $\text{Id}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקת הזהות. נניח כי

$\ker(\text{Id} - T) = \text{sp}\{(2, 1, 0), (0, 1, 2)\}$ וגם $\ker(\text{Id} + T) = \text{sp}\{(1, -2, 1)\}$

מצאו נוסחה מפורשת עבור T (כלומר מהצורה $T(a, b, c) = \dots$).

דף נוסף לשאלה מספר _____

.6

א. (12 נק') מצאו לאילו ערכי a , אם בכלל, למערכת המשוואות הבאה מעל המספרים הממשיים יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & -1 & 4 \\ a & a-1 & -1 & a+3 \\ 1 & a-1 & a-3 & 7 \end{array} \right)$$

ב. (8 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש $|A| = 2$. מצאו את $|3AA^T A^{-1} \text{adj}(A)|$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____