

מבחן מועד ב' – מבוא לאלגברה לינארית 1 – 31/08/22

זמן המבחן: 4 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 30 נק', ענו על כל השאלות.

1. (שאלה מבגרות)

א. יהי מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ (שאינו ממשי) המקיים את המשוואה $z + \frac{1}{z} = 2\cos(b)$, כאשר $b \in \mathbb{R}$.

i. הביעו באמצעות הפרמטר b את z . מצאו את שני הפתרונות.

ii. האם הביטוי $z^n + \frac{1}{z^n}$ הוא ממשי טהור, מדומה טהור או לא זה ולא זה?

(כאשר z המספר הנתון וכן $n \in \mathbb{N}$).

ב. נתון כי מספר מרוכב z נמצא ברביע הראשון מחוץ למעגל היחידה.

סרטטו במערכת צירים את מעגל היחידה, ומקמו בסרטוט את z ואת \bar{z} , $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{\bar{z}}$.

הערה: אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'.

2. יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר, ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y = a \\ ax + 2ay = a^2 + 1 \\ x + y + (a^2 - 1)z = a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות.

ב. עבור $a = 1$, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת.

ג. עבור $a = 2$, מצאו את הפתרון של המערכת.

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. מצאו את המטריצה ההופכית A^{-1} .

ב. מצאו בסיסים למימדים למרחבי המטריצה $C(A)$, $R(A)$.

ג. מצאו את מימד מרחב הפתרונות $N(A)$.

4. נביט בתתי המרחבים

$$U = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$$

$$W = \text{span}\{(1,1,1), (0,0,1), (1,1,0)\}$$

א. מצאו וקטור (x, y, z) כך ש $(x, y, z) \notin W$.

ב. מצאו בסיסים ומימדים ל U , W .

ג. מצאו בסיס ומימד ל $U \cap W$.