

שאלון בחינה בקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (89-218)

סמסטר ב; מועד ב. תשע"ב

שם המרצה: ד"ר שחר נבו.

משך הבחינה  $2\frac{3}{4}$  שעות.

ללא חומר עזר, דף נוסחאות מצורף

ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. נמק תשובותיך.

1. א. בדוק התכנסות והתכנסות בהחלט של הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \sin(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

ב. חשב  $\int (1 + \sqrt[3]{x^2})^2 dx$ .

2. א. האם קיים הגבול  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ ? אם כן מהו?

ב. הראה שהלפליסיאן של  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  הוא  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

3. א. מהו רדיוס ההתכנסות של הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (-2)^n}$ , ועבור אילו ערכי  $x$  הוא מתכנס?

ב. מצא אורך גרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$   $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

4. א. חשב את השטח בין גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , המשיק בנקודה  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$  וציר  $y$ .

ב. הצג  $\ln 5$  כטור אינסופי.

5. א. מצא כל הפתרונות של המד"ר  $y' = \frac{-x^3}{(y+1)^2}$ .

ב. מצא פתרון המקיים  $y(0) = 1$ .

6. א. מצא פתרון למד"ר  $y'' - 3y' + 2y = 0$  המקיים  $y(0) = 1, y'(0) = 4$ .

ב. האם יש מד"ר מהצורה  $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$  אשר  $y_1(x) = x, y_2(x) = \sin x$  הם פתרונות שלה

בקטע  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

בהצלחה!

### שאלה 1

$$\int (1 + \sqrt[3]{x^2})^2 dx = \int \left(1 + 2x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}\right) dx = x + \frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} + c$$

### שאלה 3

א. נחשב את רדיוס ההתכנסות  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n \cdot (-2)^n} \right|} = \frac{1}{2}$  רדיוס ההתכנסות הוא 2.

יש לבדוק את ההתכנסות בקצוות ז"א עבור  $x = 2, x = -2$ .

עבור  $x = 2$  נקבל  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot (-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  קיבלנו טור מתכנס.

עבור  $x = -2$  נקבל  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot (-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  קיבלנו טור מתבדר.

ב. יש לחשב  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}$

### שאלה 4

א. נמצא את משוואת המשיק בנקודה  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .  $f'(1) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

משוואת המשיק  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-1)$

ב. נחשב טור טיילור עבור  $\ln \frac{1+x}{1-x}$ .  $\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right)' = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$

ראינו ש  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  ולכן  $\frac{2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n}$  ומכיון ש  $\int \frac{2}{1-x^2} dx = \ln \frac{1+x}{1-x}$  נקבל

$$\ln 5 = \ln \frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$$

### שאלה 5

א. מצא את כל הפתרונות של מד"ר

ב.  $\frac{(y+1)^3}{3} = \frac{-x^4}{4} + c \Leftrightarrow (y+1)^2 dy = -x^3 dx \Leftrightarrow y' = \frac{-x^3}{(y+1)^2}$

ג. נתון ש  $y(0) = 1$  ואז הפתרון  $c = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{(1+1)^3}{3} = \frac{-0^4}{4} + c \Leftrightarrow \frac{(y+1)^3}{3} = \frac{-x^4}{4} + \frac{8}{3}$