תרגיל 12 – אינפי' 1

<u>שאלה 1</u>

תהי f רציפה בכל נקודה בקטע (a,∞) כך ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ וגם $\lim_{x\to a^+} f(x)=m\in\mathbb{R}$ (כלומר הגבולות הנ"ל קיימים וסופיים). הוכיחו ש- f רציפה במ"ש בקטע (a,∞).

<u>פתרון</u>

יהי $\varepsilon>0$. מכיוון ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכן בפרט לכל $x_1,x_2\in[M,\infty)$ מתקיים

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-l+l-f(x_2)|\le|f(x_1)-l|+|l-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ללא תלות במרחק בין x_1,x_2 כלל.

כפי שראינו בכיתה, ניתן להשלים את f לפונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,M+1]$ ולכן היא רציפה שם במ"ש, ולכן קיים $\delta>0$ (וניתן גם לבחור $0<\delta<1$) כך שלכל $x_1,x_2\in(a,M+1]$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

ביחד לכל $|x_1-x_2|<\delta<1$, $x_1,x_2\in(a,\infty)$, מתקיים $x_1,x_2\in(a,M+1]$ או $x_1,x_2\in[M,\infty)$ ולכן $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ ולכן הפונקציה רציפה במ"ש.

מש"ל

<u>שאלה 2</u>

תהי פונקציה f המקיימת את התנאי הבא: קיים $k>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in A$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|$ (זה נקרא תנאי ליפשיץ).

הוכיחו/הפריכו: f רציפה במ"ש ב- A.

<u>פתרון</u>

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ניקח $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ אזי אם $|x_1 - x_2| < \delta$ מתקיים

$|f(x_1) - f(x_2)| \le k|x_1 - x_2| < k\delta = k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$.

מש"ל

שאלה 3

הוכיחו על פי ההגדרה שהפונקציה הבאה רציפה במ"ש בקטע $[-4,3]$:

$f(x) = x^3 + x$.

פתרון

יהי $\varepsilon > 0$. יהיו $x, y \in [-4,3]$.

$$|f(x) - f(y)| = |x^3 + x - y^3 - y| = |x - y| \cdot |x^2 + y^2 + xy + 1| \le$$
$$\le |x - y| \cdot (x^2 + y^2 + |x| \cdot |y| + 1) \le |x - y| \cdot (16 + 16 + 16 + 1) \le 49 \cdot |x - y|$$

כעת נבחר, $\delta = \frac{\varepsilon}{49}$ ונקבל הדרוש.

מש"ל

שאלה 4

קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטעים הנתונים:

א. $\sin e^x$ בקטע $(0,\infty)$

לא. נמצא שתי סדרות מתאימות על מנת להראות שפונקציה זו אינה רציפה במ"ש. $x_n = \ln\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ ו $y_n = \ln\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$. קל לראות ש

$$|x_n - y_n| = \ln\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \ln\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right) = \ln(1) = 0$$

כמו כן, $|f(x_n) - f(y_n)| = |1 - (-1)| = 2$

ב. $\ln x$ בקטע $(0,\infty)$

לא. $\ln x$ אינה רבמ"ש בקטע $(0,1)$ (ראינו בתרגול) ולכן אינה רבמ"ש ב- $(0,\infty)$**.**

ג. $\sin\sqrt{(x+2\pi)}$ בקטע $(0,\infty)$

כן. $x+2\pi$ רציפה במ"ש ובתחום הנ"ל $x+2\pi>0$. $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש עבור $x>0$ ו- $\sin x$ רציפה במ"ש על כל הממשיים. לכן סה"כ זו הרכבה של רציפות במ"ש ולכן רציפה במ"ש (על פי תרגיל 7 בקובץ זה).

<u>דרך נוספת</u>: ניתן לגזור את הפונקציה ולראות שהנגזרת חסומה בתחום הנתון.

<u>שאלה 5</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה במ"ש בכל קטע $[n,n+1]$ עבור $n\in\mathbb{N}$ אזי f רציפה במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

<u>הפרכה</u>

למשל: $f(x)=x^2$. ראינו שפונקציה זו לא רציפה במ"ש בכל הישר הממשי, אבל היא כן רציפה במ"ש בכל קטע סגור (לפי קנטור).

ב. אם f,g רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f+g$ רציפה במ"ש בקטע I.

<u>הוכחה</u>

יהי $\varepsilon>0$. f רבמ"ש ולכן קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

g רבמ"ש ולכן קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta_2$ מתקיים $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

כעת, עבור $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ שני אי השוויונים מתקיימים ולכן:

$$\left|(f+g)(x)-(f+g)(y)\right|=\left|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)\right|\le$$
$$\le\left|f(x)-f(y)\right|+\left|g(x)-g(y)\right|<\varepsilon$$

ג. אם f, g רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f\cdot g$ רציפה במ"ש בקטע I.

<u>הפרכה</u>

ניקח $f(x)=g(x)=x$. כל אחת מהן רבמ"ש, אבל $(f\cdot g)(x)=x^2$ לא רבמ"ש.

<u>שאלה 6</u>

הוכיחו את הטענה הבאה: יהיו f, g רציפות במ"ש וחסומות ב- $\mathbb{R}$. הוכיחו כי $f\cdot g$ רציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>

f, g חסומות ולכן קיימים $M, K>0$ כך ש- $|f(x)|\le M,\ |g(x)|\le K,$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

על מנת להוכיח ש- $f\cdot g$ רבמ"ש: יהי $\varepsilon>0$ צריך להראות שקיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אזי $\left|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(y)\right|<\varepsilon$.

לפי הנתון ש- f רבמ"ש: קיים $\delta_1>0$ כך שאם $|x-y|<\delta_1$ אזי $\left|f(x)-f(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

לפי הנתון ש- g רבמ"ש: קיים $\delta_2>0$ כך שאם $|x-y|<\delta_2$ אזי $\left|g(x)-g(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2K}$.

כעת, מתקיים:

$$\left|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(y)\right|=\left|f(x)g(x)-f(y)g(y)\right|=$$
$$=\left|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)\right|\le$$
$$\le\left|f(x)g(x)-f(x)g(y)\right|+\left|f(x)g(y)-f(y)g(y)\right|=$$
$$=\left|f(x)\right|\left|g(x)-g(y)\right|+\left|g(y)\right|\left|f(x)-f(y)\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}=\varepsilon$$

איזו דלתא נבחר? $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

שימו לב שזאת ההוכחה הישירה, ולפני זה מומלץ מאוד לעשות טיוטה, אחרת לא ממש רואים איזה אפסילון יש לבחור בכל הגדרה.

מש"ל

שאלה 7

א. יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפות במ"ש. הוכיחו כי $f\circ g$ (הרכבה) רציפה במ"ש.

הוכחה

יהי $\varepsilon>0$. נתון ש- f רבמ"ש, לכן קיים $\delta>0$ כך שאם (*) $|x-y|<\delta$ אזי $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

נתון ש- g רבמ"ש ולכן לכל $\varepsilon_1>0$, ובפרט עבור $\varepsilon_1=\delta$ קיים $\alpha>0$ כך שאם $|x-y|<\alpha$ אזי $|g(x)-g(y)|<\delta$.

ובגלל ש- $g(x)$ מקיים את תנאי (*) אז נקבל: $|f(g(x))-f(g(y))|<\varepsilon$.

מש"ל

ב. האם הפונקציה $f(x)=x^{\sqrt{2}}$ היא רציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$?

פתרון

התשובה היא לא. נניח בשלילה שכן, אזי $f\circ f(x)=f(f(x))=x^2$ היא רבמ"ש לפי סעיף א', וזאת סתירה (ראיתם בהרצאה).

מש"ל

• <u>תזכורת</u> (קירוב לינארי): $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ כאשר x קרוב ל x_0.

<u>שאלה 8</u>

תעריכו לפי הקירובים הלינאריים את הערכים הבאים:

א. $\arctan(1.01)$ (זכרו כי $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$)

<u>פתרון</u>

מכיוון ש $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ נובע לפי הגדרה ש $tg\frac{\pi}{4}=1$ ולכן $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. לכן נבחר $x_0=1$ ולכן לפי הנוסחא לעיל

כלומר $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=\arctan(x_0)+\frac{1}{1+x_0{}^2}(x-x_0)$

$$\arctan(1.01)\approx\arctan(x_0)+\frac{1}{1+x_0{}^2}(x-x_0)=$$

$$=\arctan(1)+\frac{1}{1+1^2}(1.01-1)=\frac{\pi}{4}+0.005=0.7903981...$$

ובמציאות (במחשבון)

$$\arctan(1.01)=0.7903732...$$

מש"ל

ב. $(2.01)^{2\cos\ln(1.01)}$

<u>פתרון</u>

נבחר $x_0=1$, $f(x)=(1+x)^{2\cos(\ln(x))}$. לכן

$$f'(x)=(1+x)^{2\cos(\ln(x))}\left(2\cos(\ln(x))\ln(1+x)\right)'=$$

$$=(1+x)^{2\cos(\ln(x))}\left(\frac{-2\sin(\ln x)\ln(1+x)}{x}+\frac{2\cos(\ln(x))}{1+x}\right)$$

לכן $f(1)=(1+1)^{2\cos(\ln 1)}=2^2=4$, $f'(1)=4\left(0+\frac{2}{2}\right)=4$ ביחד:

$$\left(2.01\right)^{2\cos\ln(1.01)} = f(1.01) \approx f(1) + f'(1)(0.01) = 4 + 0.04 = 4.04$$

ובמציאות (במחשבון) $\left(2.01\right)^{2\cos\ln(1.01)} = 4.03982...$

מש"ל

<u>שאלה 9</u>

חשבו את הגבולות:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

<u>פתרון</u>
נוכיח באינדוקציה שהגבול הנ"ל הינו אפס. טריוויאלי עבור $k=0$. נניח שנכון עבור $k-1$ ונוכיח עבור k:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^k\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{kx^{k-1}}{e^x} = k\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k-1}}{e^x} = 0.$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$

<u>פתרון</u>
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)}$. כעת

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x} =$. כעת המונה והמכנה שואפים לאינסוף ולכן ניתן להפעיל לופיטל, וזה שווה:

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5} = 3$$

ולכן הגבול כולו שווה ל- e^3.

ג. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}$

פתרון
המכנה והמונה שואפים לאפס, לכן נפעיל לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(x^2)}{2x\sin(x^2)+x^2 2x\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\sin(x^2)+x^2\cos(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2x\cos(x^2)+2x\cos(x^2)-x^2 2x\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)}{\cos(x^2)+\cos(x^2)-x^2\sin(x^2)}=\frac{1}{2}$$

ד. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

פתרון

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$$

שאלה 10

מצאו פונקציה $f\left(x\right)$ מוגדרת על $\mathbb{R}$ כך ש-

$$f\left(3\right)=2,\ f'\left(3\right)=5,\ f''\left(3\right)=-4,\ f'''\left(3\right)=7,\ f^{(4)}\left(3\right)=-1,\ f^{(5)}\left(3\right)=6$$

פתרון
נבחר את f להיות פולינום שגזיר אינסוף פעמים מעצם היותו פולינום. אם היינו מפתחים את f מסביב לנקודה 3, אז פולינום טיילור מסדר 5 היה נראה כך:

$$f\left(3\right)+\frac{f'\left(3\right)}{1!}(x-3)+\frac{f''\left(3\right)}{2!}(x-3)^2+$$

$$+\frac{f'''\left(3\right)}{3!}(x-3)^3+\frac{f^{(4)}\left(3\right)}{4!}(x-3)^4+\frac{f^{(5)}\left(3\right)}{5!}(x-3)^5$$

זהו פולינום ממעלה 5, ואם ניקח אותו בתור הפונקציה ברור שהנגזרות מסדר 6 ומעלה מתאפסות זהותית (כי זה פולינום מסדר 5). כעת, נציב את המספרים הנתונים ונקבל:

$$f\left(x\right)=2+\frac{5}{1!}(x-3)+\frac{-4}{2!}(x-3)^2+$$

$$+\frac{7}{3!}(x-3)^3+\frac{-1}{4!}(x-3)^4+\frac{6}{5!}(x-3)^5$$

או:

$$f(x)=2+5(x-3)-2(x-3)^2+$$
$$+\frac{7}{6}(x-3)^3-\frac{1}{24}(x-3)^4+\frac{1}{20}(x-3)^5$$

מש"ל

<u>שאלה 11</u>

מצאו פולינום $P(x)$ כך שלכל $x\in(-1,1)$ מתקיים $\left|xe^x-P(x)\right|<10^{-4}$.

<u>פתרון</u>

נסמן $f(x)=xe^x$ ונשתמש בפיתוח טיילור של פונקציה זו על מנת למצוא את $P(x)$. מתקיים:

$$f(x)=xe^x\ \ ,\ \ f(0)=0$$
$$f'(x)=e^x+xe^x\ \ ,\ \ f'(0)=1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x\ \ ,\ \ f^{(n)}(0)=n$$

כעת, $r_n(x)=\frac{(n+1)e^c+ce^c}{(n+1)!}x^{n+1}$. עבור c בין 0 ל- x מתקיים $|c|<1$ ולכן:

$\left|\frac{3(n+2)}{(n+1)!}\right|<\left|\frac{3(n+1+c)}{(n+1)!}\right|<\left|\frac{e^c(n+1+c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=|r_n(x)|$, ואנחנו רוצים שיתקיים

$\left|\frac{3(n+2)}{(n+1)!}\right|<10^{-4}$. ניתן לבדוק שזה מתקיים החל מ- $n=8$. לכן

$P(x)=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^5}{4!}+\frac{x^6}{5!}+\frac{x^7}{6!}+\frac{x^8}{7!}$.

מש"ל

<u>שאלה 12</u>

השתמשו בפיתוח טיילור של הפונקציה $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ לחשב את $\ln 2$ עם טעות קטנה מ- $2\cdot 10^{-4}$.

<u>פתרון</u>

ראשית $\frac{1+x}{1-x}=2$ אם ורק אם $x=\frac{1}{3}$. לכן עבור $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ עלינו לחשב בעצם את $f\left(\frac{1}{3}\right)$. נשים לב ש $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$. אם נסמן $g(x)=\ln(1+x),\quad h(x)=\ln(1-x)$ אז בעצם יתקיים: $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)-h^{(n)}(x)$.
ראינו ש $g^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$. באופן דומה למה שהראנו בתרגול לגבי הנגזרות של $\ln(1+x)$ אפשר להגיע לנוסחא לנגזרות של $\ln(1-x)$ ולקבל $h^{(n)}(x)=-(n-1)!(1-x)^{-n}$ (קל להוכיח נוסחא זו באינדוקציה). מתקיים

$$f^{(k)}(0)=g^{(k)}(0)-h^{(k)}(0)=$$
$$=(-1)^{k+1}(k-1)!(1+0)^{-k}-(-(k-1)!(1-0)^{-k})=(k-1)!\left(1+(-1)^{k+1}\right)$$

לכן עפ"י פיתוח טיילור מסביב לאפס נקבל שקיימת נקודה $c\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$

$$\ln 2=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\left(\frac{1}{3}-0\right)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$ כאשר שארית לגרנז' היא

$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$. אנו רוצים ש $\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right|<2\cdot 10^{-4}$.

מהנ"ל $f^{(n+1)}(x)=g^{(n+1)}(x)-h^{(n+1)}(x)$. לכן $f^{(n+1)}(c)=(-1)^{n+2}(n)!(1+c)^{-n-1}-\left(-n!(1-c)^{-n-1}\right)$. נקבל ש

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+2}n!(1+c)^{-n-1}-\left(-n!(1-c)^{-n-1}\right)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right|=$$
$$=\left|\frac{(-1)^{n+2}+1}{(1+c)^{n+1}(n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right|<\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

שימו לב ש $c>0$ ומכאן $\frac{1}{(1+c)^{n+1}}<1$ וכמו כן $\left|(-1)^{n+2}+1\right|=(-1)^{n+2}+1\le 2$.

לכן מספק לדרוש ש $\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}<2\cdot 10^{-4}$. כלומר ש $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n+1}<10^{-4}$.
החל מ $n=6$ אי שוויון זה מתקיים. לכן נחשב פולינום טיילור מסדר 6. שימו לב שכל המחוברים במקומות הזוגיים מתאפסים ומקבלים

$$\sum_{k=0}^{6}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\left(\frac{1}{3}-0\right)^k=\sum_{k=0}^{6}\frac{(k-1)!\left(1+(-1)^{k+1}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^k}{k!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{6}\frac{\left(1+(-1)^{k+1}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^k}{k}=2\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^1}{1}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{5\cdot 3^4+5\cdot 3+1}{5\cdot 3^5}=\frac{842}{1215}$$

מש"ל

שאלה 13

א) חשבו $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}(0)$.

ב) היעזרו בפולינום טיילור כדי וחשבו את $\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}}$

<u>פתרון</u>

א. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}\in D^{\infty}(-1,1)$.

ניעזר בנוסחא של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת עבור $|q|<1$

$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$. לכן $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum_{k=0}^{n}x^{2k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}$

$\sum_{k=0}^{n}x^{2k}$ פולינום מסדר $2n$. נראה ש $x\to 0$ $\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}=o(x^{2n})$, ומיחידות

הפיתוח נסיק ש $\sum_{k=0}^{n}x^{2k}$ פולינום טיילור מסדר $2n$. הפונקציה

$\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}=\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}$ רציפה באפס ומתקיים:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-x^2}=0$. לכן, $x\to 0$ $\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}=o(x^{2n})$.

כעת, עבור $m=2k-1$ $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}(0)=0$. עבור $m=2k$ נקבל ש

$\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(2k)}(0)}{(2k)!}=1$ (מהשוואת המקדמים של x^{2k}). מכאן,

$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(2k)}(0)=(2k)!$. בסה"כ:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(m)}(0)=\begin{cases}0 & m=2k-1\\ (2k)! & m=2k\end{cases}.$$

ב. $e^x=1+x+o(x)$ ו- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. לכן,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x)-1)^2}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))^2}{x+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2xo(x)+(o(x))^2}{x+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x)}{x+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{o(x)}{x}}{1+\frac{o(x^2)}{x}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

הסבר: צמצמנו באיקס, כמו כן $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}\cdot x=0\cdot 0=0$.

משל"ל