פתרון תרגיל 6 – אינפי 1

שאלה 1

הוכיחו/הפריכו:

א. אם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר.

הוכחה: $\sum b_n$ מתכנס ולכן $b_n \to 0$ ולכן $\frac{1}{b_n}$ לא מוגדר או לא חסום ובכל מקרה אינו שואף לאפס ולכן הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ בוודאי מתבדר.

ב. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם $\sum a_n{}^2$ מתכנס

הוכחה: $\sum a_n$ מתכנס ולכן $a_n \to 0$. ניקח $\varepsilon = 1$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon = 1$ ולכן $a_n{}^2 = |a_n|^2 = |a_n| \cdot |a_n| \le 1 \cdot |a_n| = |a_n|$ אבל $\sum a_n$ טור חיובי ולכן $|a_n| = a_n$ ולכן קיבלנו $a_n{}^2 \le a_n$ ולפי מבחן ההשוואה $\sum a_n{}^2$ מתכנס.

מש"ל

שאלה 2

קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או לא (והוכיחו!):

א. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$$

פתרון: לפי מבחן קושי $\sqrt[n]{\frac{n^3}{(\ln 3)^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}{\ln 3} \to \frac{1}{\ln 3} < 1$ ולכן הטור מתכנס.

ב. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$$

__פתרון:__ לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}}=\frac{2(n+2)}{(n+1)^2}\to 0$ ולכן הטור מתכנס.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

__פתרון:__ לפי מבחן קושי $\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\frac{1}{\ln n}\to 0$ ולכן הטור מתכנס.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}$

__פתרון:__ לפי מבחן המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}}{\frac{n+2}{n(n+1)}}=\frac{n(n+3)}{(n+2)^2}\to 1$ לא ניתן לפתור את השאלה בעזרת מבחן זה.

נשווה את הטור הנתון עם הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$ (מבחן השוואה שני):

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$ ולכן הטור מתבדר כמו הטור ההרמוני $\sum\frac{1}{n}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^n}$ עבור $a>0$ קבוע.

__פתרון:__ זהו טור חיובי לפי הנתון, ולכן לפי מבחן המנה

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}}{\frac{n!}{a^n}}=\frac{n+1}{a}\to\infty>1$ ולכן הטור מתבדר.

ו. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

__פתרון:__ קל לראות שזו סדרה מונוטונית יורדת לאפס חיובית, (כי גם n וגם $\ln n$ מונוטוניות עולות לאינסוף). לכן נפעיל את מבחן העיבוי:

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln\left(2^n\right)}$ מתכנס. אבל זה שווה ל-

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}=\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln\left(2^n\right)}$ וזהו טור מתבדר ולכן כך גם הטור המקורי.

ז. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

פתרון: מתקיים $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, ומכיוון ש- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to e$, האיבר הכללי של הטור אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר.

ח. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2^n}$

פתרון: תחילה "נפשט" קצת את המצב. שימו לב שמתקיים $\frac{n}{n+2^n}<\frac{n}{2^n}$.

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. מתקיים $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ ולכן לפי מבחן המנה, הטור מתכנס. כעת, ממבחן ההשוואה הראשון נובע שגם הטור המקורי מתכנס.

מש"ל

שאלה 3

חשבו את סכומי הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$;

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}$.

פתרון

סעיף א

$$1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

$$S_N=\ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=$$

$$[\text{לאחר צמצום}]=\ln\left(\frac{1(1+2)}{(1+1)(1+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$1+\frac{1}{n+1}\to 1$ ולכן $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\to 0$ ולכן $S_N\to\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ולכן סכום הטור הוא $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

סעיף ב

תחילה נפרק את האיבר הכללי לשברים חלקיים ונקבל $\frac{1}{(n+2)(n+4)}=\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{2(n+4)}$. נכתוב כעת את האיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקיים:

$$S_n=\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 5}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 6}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 7}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 6}-\frac{1}{2\cdot 8}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{2\cdot n}-\frac{1}{2\cdot(n+2)}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot(n+1)}-\frac{1}{2\cdot(n+3)}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot(n+2)}-\frac{1}{2\cdot(n+4)}\right)$$

לאחר צמצום נקבל $S_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2(n+3)}-\frac{1}{2(n+4)}$. קל לראות ש- $\lim S_n=\frac{7}{24}$ וזהו סכום הטור.

מש"ל

שאלה 4

הוכיחו שטור חיובי $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

פתרון

$\Leftarrow$: מכיוון שהטור $\sum a_n$ מתכנס, מתקיים $a_n \to 0$ ולכן $\lim \frac{1}{1+a_n} = 1$, $\lim \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \lim \frac{1}{1+a_n} = 1$,

מכאן שגם הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

$\Rightarrow$: מכיוון שהטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס, מתקיים $\lim \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ ולכן

$\lim \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \lim \frac{1}{1+a_n} = \lim \left(\frac{1+a_n}{1+a_n} - \frac{a_n}{1+a_n} \right) = \lim \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n} \right) = 1$. מכאן שהטור המקורי מתכנס.

מש"ל

שאלה 5

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור. נגדיר סדרה $\{b_n\}$ על ידי $b_{2n} = 0,\ b_{2n-1} = a_n$. כלומר, $\{b_n\} = \{a_1, 0, a_2, 0, \ldots\}$. הוכיחו: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; ואם הם מתכנסים, אזי סכומם זהה.

פתרון

נסמן ב- S_n^b את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, וב- S_n^a את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. נשים לב שמתקיים $S_{2n}^b = S_n^a,\ S_{2n-1}^b = S_n^a$.

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, נניח לסכום S, אזי $S_{2n}^b = S_{2n-1}^b \to S$ ולכן הסדרה $\{S_n^b\}$ מתכנסת ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס וסכומו S.

הכיוון ההפוך באופן דומה.

מש"ל