מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 10 -פתרון

<u>שאלה 1</u>

יהיו X,Y מ"ט קשירים מסילתית ו-$A\subset X, B\subset Y$.

<u>הוכיחו</u> ש- $X\times Y-A\times B$ מ"ט קשיר מסילתית.

<u>הוכחה</u>

יהיו $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\in X\times Y-A\times B$.

נסמן: $Z=X\times Y-A\times B$ ו- $C=X-A, D=Y-B$.

אזי קל לראת ש- $Z=C\times Y\cup X\times D$.

$$Z=\left(\bigcup_{c\in C}(\{c\}\times Y)\right)\bigcup\left(\bigcup_{d\in D}(X\times\{d\})\right)=\bigcup_{(c,d)\in C\times D}(\{c\}\times Y\cup X\times\{d\})$$

נסמן איבר האיחוד ב-$Z_{c,d}$:

$$Z_{c,d}\coloneqq\{c\}\times Y\cup X\times\{d\}$$

אז אפשר לכתוב

$$Z=\bigcup_{(c,d)\in C\times D}Z_{c,d}$$

נסים לב ש-

- $\{c\}\times Y$ הומאומורפי ל-Y ולכן קשור מסילתית,
- $X\times\{d\}$ הומאומורפי ל-X ולכן קשור מסילתית,
- $\{c\}\times Y\cap X\times\{d\}=\{(c,d)\}\neq\emptyset$ ולכן <u>$Z_{c,d}$ קשור מסילתית</u>.

חוץ מזה, לכל שני זוגות $(c_1,d_1),(c_2,d_2)\in C\times D$ מתקיים:
$(c_1,d_2)\in(\{c_1\}\times Y\cup X\times\{d_1\})\bigcap(\{c_2\}\times Y\cup X\times\{d_2\})$.

כלומר, $Z_{c_1,d_1} \cap Z_{c_2,d_2} \neq \emptyset$. לכן Z_{c_1,d_1}, Z_{c_2,d_2} מוכלות באותו רכיב קשורות מסילתית. מזה נובע שהאיחוד שלהם מוכל באותו רכיב קשורות מסילתית P. כלומר, $Z \subseteq P$. מכייון ש-Z זה כל המרחב, $Z \supseteq P$, כלומר $Z = P$ ואז Z קשיר מסילתית, מש"ל.

<u>שאלה 2</u>

יהיו X, Y מ"ט ו- $f: X - Y$, $g: Y \to X$ העתקות רציפות כך ש- $f \circ g = Id_Y$.

<u>הוכיחו</u> ש-f העתקת מנה.

<u>הוכחה</u>

(1) אם $V \subseteq Y$ קבוצה פתוחה, אז $f^{-1}(V)$ פתוחה (רציפות f).

(2) אם $V \subseteq Y$ ו-$f^{-1}(V)$ פתוחה, אז $g^{-1}\left(f^{-1}(V)\right)$ פתוחה (רציפות g). אבל:

$$g^{-1}\left(f^{-1}(V)\right) = (f \circ g)^{-1}(V) = Id_Y^{-1}(V) = V,$$

כלומר, אם $f^{-1}(V)$ פתוחה, אז V פתוחה.

אז f העתקת מנה לפי ההגדרה, מש"ל.

<u>שאלה 3</u>

<u>הוכיחו</u> ש-$sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$ העתקת מנה.

<u>הוכחה.</u>

הקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ הוא תת מרחב ב-$\mathbb{R}$.

נתבונן בצמצום $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. ברור שזו פונקציית על ורציפה (תכון) . הקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ קבוצה קומפקטית כי היא קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}$ (משפט היינה - בורל). לכן $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ פונקציה

סגורה, כי $[-1,1]$ מרחב האוסדורף. אבל פונקציה רציפה וסגורה היא העתקת מנה (משפט מהרצאה). לכן $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ העתקת מנה.

וזה גורר שגם $sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$ העתקת מנה (לפי משפט על פונקציה רציפה כאשר ישנו צמצום שלה עם אותה תמונה והצמצום עצמו הוא העתקת מנה) .

<u>שאלה 4</u>

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\times[0,\infty)$ פונקציה כך ש-$f\big((x,y)\big)=(x,|y|)$

<u>הוכיחו</u> ש-f העתקת מנה.

<u>הוכחה</u>

תהי $abs:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה כך ש- $abs(y)=|y|$ לכל $y\in\mathbb{R}$.

אזי $f=(Id_{\mathbb{R}},abs)$. הפונקציות $Id_{\mathbb{R}},abs$ רציפות ולכן f <u>רציפה</u> כי רכיביה רציפות (הרצאות).

קל לראות ש- $f|_{\mathbb{R}\times[0,\infty)}=Id_{\mathbb{R}\times[0,\infty)}$.

אבל $Id_{\mathbb{R}\times[0,\infty)}$ – הומאומורפיזם ולכן העתקת מנה.

כלומר $f|_{\mathbb{R}\times[0,\infty)}$ <u>העתקת מנה</u>.

לפי המשפט על צמצום של פונקציה רציפה עם אותה תמונה כאשר הצמצום עצמו העתקת מנה, אפשר לטעון ש-f העתקת מנה, מש"ל.

<u>שאלה 5</u>

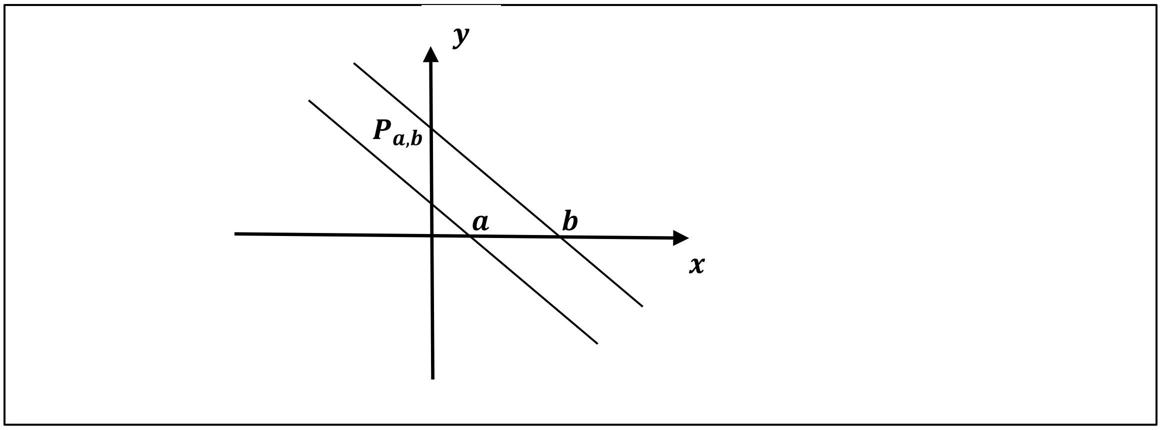
יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$. תהי $P_{a,b}\subseteq\mathbb{R}^2$ רצועה במישור כך ש-

$$P_{a,b}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a-x<y<b-x\}$$

<u>הוכיחו:</u>

<u>א'</u> אוסף הקבוצות $\{P_{a,b}|a<b\}$ הוא בסיס לתופולוגיה מסוימת (נסמן אותה ב-T) על <u>הקבוצה</u> $\mathbb{R}^2$. (<u>רמז</u>. תעשו ציור)

הוכחה



רואים ש- $P_{a,b}$ רצועה על המישור בין הקווים הישרים $y = a - x$ ו-$y = b - x$. רואים גם:

- חיתוך לא ריק של שתי רצועות כאלה גם רצועה מאותו סוג;
- את כל המישור אפשר לכסות על ידי הרצעות מסוג זה.

לכן מתקיים תנאי מספיק לכך שאוסף הרצועות יהיה בסיס לטופולויה, מש"ל.

נזכיר שקראנו לטופולוגיה הזאת T.

<u>ב'</u> המרחב הטופולוגי $(\mathbb{R}^2, T)$ אינו מרחב האוסדורף.

הוכחה

נניח ששתי נקודות $p, q \in \mathbb{R}^2$ שונות <u>שייכות לאותו ישר</u> מסוג $y = c - x$ כאשר $c \in \mathbb{R}$ קבועה. אז כל רצועה $P_{a,b}$ או מכילה את כל הישר או לא חותכת אותו בכלל (שרטוט, לימודים קודמים).

לכן שתי הנקודות אי אפשר להפריד על ידי הרצועות.

אזי הטופולוגיה T איננה טופולוגית האוסדורף כי עם בסיס מרחב האוסדורף זה כן אפשרי (ההרצאות).