תרגול 4
האינטגרל המסוים

הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$. יהי n מספר טבעי, ותהי T חלוקה של $[a,b]$ ל n תתי-קטעים

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

נסמן את קטעי החלוקה ע"י

$$\Delta x_1 = [x_0, x_1], \Delta x_2 = [x_1, x_2], ..., \Delta x_n = [x_{n-1}, x_n]$$

ונסמן $\Delta T = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_{31}, ..., \Delta x_n\}$ ונקרא ל ΔT הפרמטר של החלוקה T. מכל קטע Δx_i נבחר נקודה שרירותית c_i, אזי הביטוי $\sigma_T(c_1, c_2, ..., c_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ נקרא הסכום האינטגרלי של רימן המתאים לחלוקה T ולבחירת הנקודות c_i.

הפונקציה $f(x)$ נקראת אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$ אם קיים הגבול $I = \lim_{\Delta T \to 0} \sigma_T(c_1, c_2, ..., c_n) = \lim_{\Delta T \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ והוא בלתי תלוי בבחירת החלוקה T ובבחירת נקודות החלוקה c_i, כל עוד פרמטר החלוקה ΔT שואף לאפס.

את הגבול הזה נסמן ע"י $I = \int_a^b f(x)dx$ ונקרא לו האינטגרל המסוים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

תכונות האינטגרל המסוים

א. לכל פונקציה $f(x)$ המוגדרת בנקודה $x = a$ נקבע כי $\int_a^a f(x)dx = 0$.

ב. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז נקבע כי $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

ג. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז לכל מספר קבוע c, הפונקציה $cf(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

ד. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ ו $[b,c]$ אז היא אינטגרבילית גם בקטע $[a,c]$ ומתקיים $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

ה. אם $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציות $f(x) \pm g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

ו. אם $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציה $f(x)g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

נוסחת ניוטון-לייבניץ

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

דוגמא

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה e^x ולבין הישרים $x=0, x=\ln 4$.

נחשב את האינטגרל המסוים $\int_0^{\ln 4} e^x dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4-1=3$.

<u>החלפת משתנים</u>

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ותהי $x=g(t)$ פונקציה גזירה בקטע $[\alpha,\beta]$ ואשר התמונה שלה שווה לקטע $[a,b]$ כאשר $g(\alpha)=a$ ו $g(\beta)=b$. אזי $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt$

<u>תרגיל</u>

חשב $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

<u>פתרון</u>

נציב $x=\pi-t$ ז"א $g(t)=\pi-t$. $g(\pi)=0, g(0)=\pi$.

$x=\pi-t \Leftarrow dx=-dt$.

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx = -\int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\sin^2(\pi-t)}dt = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t - t\sin t}{1+\sin^2 t}dt = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{1+\sin^2 t}dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$

סה"כ קיבלנו

$$2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{1+\sin^2 t}dt \Leftarrow \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{1+\sin^2 t}dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים $\int \frac{\pi\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{\pi\sin x}{2-\cos^2 x}dx$. נציב $t=\cos x$ ואז

$dt=-\sin x dx$

$$\int \frac{\pi\sin x}{1+\sin^2 x}dx = -\pi\int\frac{1}{2-t^2}dt = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}-t}+\frac{1}{\sqrt{2}+t}\right)dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(-\ln\left(\sqrt{2}-t\right)+\ln\left(\sqrt{2}+t\right)\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}\right)$$

$$\int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \left[-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}\right)\right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\cos\pi}{\sqrt{2}-\cos\pi}\right) - \left[-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\cos 0}{\sqrt{2}-\cos 0}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

נקבל ש

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}$$

<u>שימוש באינטגרלים לחישובים גיאומטריים</u>

<u>חישוב שטחים</u>

כפי שראינו בהרצאה:

א. כאשר $f(x)>0$ - $\int_a^b f(x)dx$ נותן את השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)$ לציר ה - x.

ב. כאשר $f(x)<0$ - $\int_a^b f(x)dx$ נותן מספר שלילי כאשר הערך המוחלט הוא של המספר המתקבל הוא השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)$ לציר ה - x.

ג. אם הפונקציה $f(x)$ משנה סימן האינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$ נותן סכום אלגברי של שטחים: שטחים מעל לציר ה- x עם סימן "+" שטחים מתחת לציר ה x עם סימן "-".

<u>תרגיל</u>

מצא את השטח הכלוא בין הקו $y=1+\arctan x$ וציר ה- x בקטע $[-1,1]$.

<u>פתרון</u>

הפונקציה $y=1+\arctan x$ עולה לכל x ממשי. $y(-1)=1+\arctan(-1)=1-\frac{\pi}{4}>0$ ולכן הפונקציה חיובית לכל x בקטע $[-1,1]$.

כדי לקבל את השטח יש לחשב $\int_{-1}^{1}(1+\arctan x)\,dx$.

נמצא את הפונקציה הקדומה של $\arctan x$ בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$\int \arctan x = ?$.

$$u=\arctan x \qquad v=x$$
$$u'=\frac{1}{1+x^2} \qquad v'=1$$

$\int \arctan x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$.

$\int \frac{x}{1+x^2}dx = ?$. נשתמש בשיטת ההצבה ונציב $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$.

$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{2\cdot(1+t)}dt = \frac{1}{2}\ln|1+t| = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

$\int \arctan x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

$\int_{-1}^{1}(1+\arctan x)\,dx = \left[x + x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-1}^{1} = 2$.

<u>תרגיל</u>

חשב את השטח המוגבל ע"י הקווים $y=\ln^2 x$, $y=0$, $x=e$, $x=\frac{1}{e}$.

<u>פתרון</u>

הפונקציה $y=\ln^2 x$ אי שלילית ולכן יש לחשב את $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln^2 xdx$.

נחשב את $\int \ln^2 xdx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$u = \ln^2 x \qquad v = x$$
$$u' = \frac{2\ln x}{x} \qquad v' = 1$$

$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx$.

נחשב את $\int \ln x dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$u = \ln x \qquad v = x$$
$$u' = \frac{1}{x} \qquad v' = 1$$

$\int \ln x dx = x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x$.

$$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln^2 x dx = \left[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = (e - 2e + 2e) - \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{2}{e}\right) = e - \frac{5}{e}$.

<u>הערה</u>

נניח ש $f(x) \le g(x)$ לכל x בקטע $[a,b]$ אז השטח בין הקווים $y = f(x), y = g(x)$ בקטע $[a,b]$ הוא $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$.

<u>תרגיל</u>

חשב את השטח הכלוא בין הקווים $y = e^x + e^{-x}, y = \frac{x}{1+x^2}, x = 0, x = 2$.

<u>פתרון</u>

$\frac{x}{1+x^2} < 1$ בקטע $[0,2]$, $e^x + e^{-x} > 1$ בקטע $[0,2]$ ולכן $\frac{x}{1+x^2} < e^x + e^{-x}$ בקטע $[0,2]$ ויש לחשב

$\int_0^2 \left(e^x + e^{-x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$.

$\int \frac{x}{1+x^2}dx = ?$. נשתמש בשיטת ההצבה ונציב $t = x^2 \Leftarrow dt = 2xdx$.

$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{2\cdot(1+t)}dt = \frac{1}{2}\ln|1+t| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

$\int_0^2 \left(e^x + e^{-x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \left[e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^2 = e^2 - \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2}\ln 5$.

<u>חישוב נפחים</u>

נפח הגוף שמתקבל ע"י סיבוב הפונקציה סביב ציר ה - x מחושב ע"י הנוסחה $V = \pi\int_a^b y^2(x)dx$.

<u>תרגיל</u>

קבל בעזרת האינטגרציה נוסחאות לחישוב של הכדור בעל רדיוס R.

<u>פתרון</u>

אם נסובב את חצי העיגול, שרדיוסו R ומרכזו בראשית הצירים, שמעל ציר x נקבל כדור בעל רדיוס R.

ז"א יש לחש את נפח הגוף המתקבל מסיבוב הפונקציה $y=\sqrt{R^2-x^2}$ סביב ציר ה x בקטע $[-R,R]$.

$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\pi\left(2R^3-\frac{2R^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}$.

<u>תרגיל</u>

חשב את נפחו של הגוף הנוצר ע"י סיבוב סביב ציר ה- x של חלק העקומה $y=\sqrt{\frac{x}{x+2}}$ בקטע $[0,2]$.

<u>פתרון</u>

$$V=\int_0^2\left(\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)^2dx=\int_0^2\frac{x}{x+2}dx=\int_0^2\frac{x+2-2}{x+2}dx=\int_0^2 1-\frac{2}{x+2}dx=\left[x-2\ln\left|x+2\right|\right]_0^2=2-\ln 16+\ln 4=2+\ln\frac{1}{4}$$

<u>תרגיל</u>

חשב את נפחו של גוף המתקבל על ידי סיבוב סביב ציר ה- x של הצורה שבין הקו $y=\frac{1}{\cos x}$ ובין ציר ה- x בקטע $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

<u>פתרון</u>

$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$.

נפח הגוף שמתקבל ע"י סיבוב הפונקציה סביב ציר ה - y מחושב ע"י הנוסחה $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

<u>תרגיל</u>

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=\sin\left(x^2\right)$ והישרים $y=0, x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}, x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ מסתובב סביב ציר y. מהו נפח הגוף המתקבל?

<u>פתרון</u>

$$V=2\pi\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}x\sin\left(x^2\right)dx=2\pi\left[\frac{\cos\left(x^2\right)}{2}\right]_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}=\pi\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\pi$$

<u>חישוב אורך קשת</u>

ניתן לחשב אורך קשת של $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$ בעזרת הנוסחה $\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

<u>תרגיל</u>

חשב את אורך העקום $y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$ בתחום $0\le x\le 3$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בנוסחה לחישוב אורך עקום $\int\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

$$y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y'=2x\cdot\sqrt{\left(1+x^2\right)}$$

$$\left(y'\right)^2=4x^2\cdot\left(1+x^2\right)$$

נשאר לחשב $\int_0^3\sqrt{1+4x^2+4x^4}\,dx=\int_0^3\left(1+2x^2\right)dx=\left[x+\frac{2x^3}{3}\right]_0^3=21$.

<u>חישוב שטח מעטפת</u>

נוסחה לחישוב שטח המעטפת של גוף המתקבל מסיבוב הפונקציה $f\left(x\right)$ סביב ציר ה x.

$$S=2\pi\int_a^b f\left(x\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}\,dx$$

<u>תרגיל</u>

הפונקציה $y=\sqrt{4-x^2}$ עבור $-1\le x\le 1$ מסתובב סביב ציר x. מצא את שטח המעטפת של הגוף המתקבל.

<u>פתרון</u>

$$1+\left(f'\left(x\right)\right)^2=\frac{4}{4-x^2}\Leftarrow\left(f'\left(x\right)\right)^2=\frac{x^2}{4-x^2}\Leftarrow f'\left(x\right)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\Leftarrow f\left(x\right)=\sqrt{4-x^2}$$

$$f\left(x\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}=\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}=2$$

$$S=2\pi\int_a^b f\left(x\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-1}^{1}2dx=8\pi.$$