דיפרנציאביליות

תזכורת (כלל השרשרת)

יהיו $E \subseteq \mathbb{R}^n, N \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחות.

תהי $g: E \to N$ דיפרנציאבילית ב - $x_0 \in E$.

תהי $f: N \to \mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ב - $y_0 = g(x_0) \in N$.

אז:

$$F(x) = f\big(g(x)\big)$$

דיפרנציאבילית ב - x_0 ומתקיים:

$$F'(x_0) = f'(y_0)\big(g'(x_0)\big)$$

הערה

אם במשפט הקודם $k = 1$, אז:

$$\mathrm{grad}F(x_0) = \mathrm{grad}f(x_0) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{grad}g_1(x_0) \\ \vdots \\ \mathrm{grad}g_m(x_0) \end{pmatrix}$$

לכן, לכל $1 \le i \le n$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_0)$$

■

דוגמה

הדרישה לדיפרנציאביליות במשפט הכרחית.

נגדיר:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

נגדיר:

$$g(t) \quad \coloneqq \quad (t,t)$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} F(t) &= f\big(g(t)\big) \\ &= \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

מתקיים:

$$\mathrm{grad}F(0) \quad = \quad \frac{1}{2}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

לכן:

$$\mathrm{grad}f(0,0) \quad = \quad (0 \quad 0)$$

לכן:

$$\mathrm{grad}F(0) \quad \neq \quad \mathrm{grad}f(0,0) \cdot \mathrm{grad}g(0)$$

לכן, לא ניתן להשתמש בכלל השרשרת.

אכן, f אינה דיפרנציאבילית ב - $(0,0)$ (**תרגיל:** הוכח!).

■

נגזרות מסדר גבוה

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

יהיו $1 \leq i, j \leq n$.

אם הנגזרת לפי x_j של הנגזרת $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ קיימת, נקבל **נגזרת חלקית מסדר שני** של f, ונסמן:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad := \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

אם $i = j$, נסמן:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

באופן דומה, ניתן להגדיר **נגזרת חלקית מסדר k**:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$$

אם כאן קיימים אינדקסים שונים, הנגזרת החלקית נקראת **נגזרת מעורבת**.

דוגמה

נגדיר:

$$f(x, y) \quad := \quad (x + y)e^x$$

מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad = \quad (x + y + 1)e^x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad = \quad e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad = \quad (x + y + 2)e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x$$

כאן, הנגזרות המעורבות מסדר 2 שוות.

■

דוגמה

נגדיר:

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

מתקיים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

כאן, הנגזרות החלקיות מסדר 2 אינן שוות.

משפט (שוורץ)

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

יהיו $1 \leq i,j \leq n$.

נניח כי f מוגדרת בסביבת הנקודה x_0, וכי בסביבה זו קיימות הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

אם $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ רציפה ב - x_0, אז הנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ קיימת, ומתקיים:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

הוכחה

נניח כי $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, כי קיימות הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

וכי נגזרת החלקית:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

רציפה ב - (x_0, y_0).

נגדיר:

$$\begin{aligned} Q(h) \quad &:= \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} \\ \varphi_\mu(x) \quad &:= \quad \frac{f(x, y_0 + \mu) - f(x, y_0)}{\mu} \\ Q^*(h, \mu) \quad &:= \quad \frac{\varphi_\mu(x_0 + h) - \varphi_\mu(x_0)}{h} \end{aligned}$$

עפ"י משפט לגרנז':

$$\begin{aligned} Q^*(h, \mu) \quad &= \quad \frac{d\varphi_\mu}{dx}(x_0 + \vartheta_1 h) \\ &= \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \mu) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0)}{\mu} \\ &= \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 \mu) \end{aligned}$$

כאשר:

$$0 \quad < \quad \vartheta_1, \vartheta_2 \quad < \quad 1$$

יהי $0 < \varepsilon$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ רציפה ב - (x_0, y_0), לכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל h, μ כך ש :

$$0 \quad < \quad |h|, |\mu| \quad < \quad \delta$$

מתקיים :

$$\left| Q^*(h,\mu) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| \quad < \quad \varepsilon$$

יהי h כך ש : $0 < |h| < \delta$.

מתקיים :

$$\lim_{\mu \to 0} Q^*(h,\mu) \quad = \quad Q(h)$$

לכן :

$$\left| Q(h) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| \quad < \quad \varepsilon$$

מתקיים :

$$\lim_{h \to 0} Q(h) \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

לכן, הנגזרת :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

קיימת, ומתקיים :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

■

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

יהי $k \in \mathbb{N}$.

נאמר ש: $f \in C^k(E)$ אם ל $-f$ קיימות כל הנגזרות החלקיות עד סדר k, והן פונקציות רציפות.

$C(E)$ היא קבוצת הפונקציות הרציפות על E.

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

יהי $k \in \mathbb{N}$.

אם $f \in C^k(E)$, אז כל הנגזרות המעורבות של f מסדר k שוות.

■

נוסחת טיילור

תזכורת

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה m פעמים בנקודה x_0.

פולינום טיילור של f מסדר m מוגדר על-ידי:

$$\mathcal{P}_m(x) \quad := \quad \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

נרשום:

$$f(x) \quad = \quad \mathcal{P}_m(x)+\mathcal{R}_m(x)$$

$\mathcal{R}_m$ נקראת ה**שארית** של $\mathcal{P}_m$.

משפט טיילור (בצורת לגרנז')

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת בקטע (a,b), גזירה ברציפות m פעמים בקטע (a,b), והנגזרת $f^{(m+1)}$ קיימת בקטע (a,b).

אזי, מתקיים:

$$\mathcal{R}_m(x) \quad = \quad \frac{f^{(m+1)}\big(x_0+\vartheta(x-x_0)\big)}{(m+1)!}\cdot(x-x_0)^{m+1}$$

כאשר:

$$0 \quad < \quad \vartheta \quad < \quad 1$$

משפט טיילור (בצורת פיאנו)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת בקטע (a,b) וגזירה ברציפות m פעמים בקטע (a,b).

אזי, מתקיים:

$$\mathcal{R}_m(x) \quad = \quad r_m(x)\cdot(x-x_0)^m$$

כאשר:

$$\lim_{x\to x_0} r_m(x) \quad = \quad 0$$

הגדרה

תהי $\mathbb{R}^n \supseteq E$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

יהי $k \in \mathbb{N}$.

הדיפרנציאל של f ב - x_0 מסדר k מוגדר על-ידי:

$$\mathrm{D}^{(k)} f(x_0)(h) \quad := \quad \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x_0) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

הגדרה

תהי $\mathbb{R}^n \supseteq E$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

יהי $m \in \mathbb{N}$.

פולינום טיילור של f מסדר m מוגדר על-ידי:

$$\mathcal{P}_m(x) \quad := \quad \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{D}^{(k)} f(x_0)(x - x_0)}{k!}$$

הערה

תהי $\mathbb{R}^n \supseteq E$ פתוחה.

תהי $f \in C^k(E)$.

אזי, באופן פורמלי, מתקיים:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \quad = \quad \prod_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{i_j}}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{(k)} f(x_0)(h) &= \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots\ \partial x_{i_k}}(x_0) \cdot h_{i_1} \cdots\ h_{i_k} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i\right)^k \\
&= \big(\mathrm{d}f(x_0)\big)^k
\end{aligned}$$

■