בס"ד

<u>פתרון תרגיל 2</u>

1. פתרון:

$$T(x,y)=(x+2y,2x+y)$$

א.
$$T(\alpha(x_1,y_1)+(x_2,y_2))=T(\alpha x_1+x_2,\alpha y_1+y_2)=$$
$$\left(\alpha x_1+x_2+2(\alpha y_1+y_2),2(\alpha x_1+x_2)+\alpha y_1+y_2\right)=$$
$$=\alpha(x_1+2y_1,2x_1+y_1)+(x_2+2y_2,2x_2+y_2)=\alpha T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)$$

ב. אתם יודעים....

ג. $T(x,y)=(x+2y,2x+y)=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ואז לפי ב'...

ד. לפי מה שלמדנו, אם $T(0)\neq 0$ אזי T אינה הע"ל וזה מה שקורה כאן....

ה. יש בעיה בשאלה, הרבה סטודנטים לא עשו, אין צורך לבדוק.

2. נתון $T(v_1),...,T(v_n)$ בת"ל. נניח בשלילה ש $v_1,...,v_n$ אינם בת"ל ז"א שקיים צ"ל ל"ט:
$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n=0$. נפעיל T על שני האגפים ונקבל:
$T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)=T(0)=0$ נשתמש בתכונות הע"ל ונקבל:
$\alpha_1Tv_1+\cdots+\alpha_nTv_n=0$, ז"א שקיים צ"ל ל"ט בסתירה להנחה ש $T(v_1),...,T(v_n)$ בת"ל.

3. פתרון:

א.
$$T(2-4x+5x^2)=2T(1)-4T(x)+5T(x^2)=2x^2-4(2x+3)+5(3x)$$
$$=2x^2+7x-12$$
ולכן זה לא יתכן.

ב. $T(ax^2+bx+c)=ax^2-b(2x+3)+c(3x)=ax^2+(3c-2b)x-3b$

ג. $T\neq S:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ש $S(1)=x^2,S(x)=2x+3$: נגדיר ש $S(x^2)=0$ ואז
נקבל: $S(ax^2+bx+c)=ax^2-b(2x+3)+c(0)=ax^2-2bx-3b$

4. פתרון:

א. $T\left(x,y,z\right)=\left(x-y,y+2z,z+x\right)$

$$,B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו את ההצגות המטריציות הבאות:

$$[T]_B^B,[T]_B^C,[T]_C^B$$

$$[T]_B^B=\left(\left[T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_B,\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right]_B,\left[T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_B\right)=\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}_B,\begin{bmatrix}1\\6\\4\end{bmatrix}_B,\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}_B\right)=\begin{pmatrix}-3&-13&-8\\-1,&-5&,-3\\4&19&11\end{pmatrix}$$

.

נחשב את מטריצות המעבר : $I_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $I_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

ונשתמש במשפט על שינוי בסיס של מטריצה מייצגת :

$$[T]_B^C = [T]_B^B [I]_B^C \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -13 & -8 \\ -1, & -5 & ,-3 \\ 4 & 19 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & -10 & 8 \\ -16 & -6 & 3 \\ 60 & 23 & -11 \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^B = [I]_C^B [T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -13 & -8 \\ -1, & -5 & ,-3 \\ 4 & 19 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -5 & 3 & 2 \\ 16 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

ב. $[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C \Rightarrow \begin{pmatrix} -31 & -10 & 8 \\ -16 & -6 & 3 \\ 60 & 23 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. הוכחה : היות וההעתקה אינה העתקת האפס, קיים וקטור $T(v) \neq 0, v \in V$. ניקח את וקטור זה ונרחיב אותו לבסיס : $B = \{v, v_1, ..., v_{n-1}\}$. נבדוק עבור כל וקטור $v_i \in B$ האם $T(v_i) \neq 0$. אם כן, סיימנו. אחרת, נחליף את $v_i \in B$ ב $v_i + v$. מחד, $T(v_i + v) = T(v_i) + T(v) = 0 + T(v) = T(v) \neq 0$. מאידך B נשאר בסיס. מדוע ? נניח שהחלפנו את כל הוקטורים ולכן קיבלנו : $newB = \{v, v_1 + v, ..., v_{n-1} + v\}$. נניח בשלילה שאינה בת"ל ולכן קיים צ"ל ל"ט : $\alpha v + \alpha_1(v_1 + v) + \cdots + \alpha_{n-1}(v_{n-1} + v) = 0$ נפצל לפי וקטורים ונקבל : $n\alpha v + \alpha_1(v_1) + \cdots + \alpha_{n-1}(v_{n-1}) = 0$ ולכן קיים לכאורה צ"ל ל"ט לוקטורים $\{v, v_1, ..., v_{n-1}\}$ בסתירה להנחה שהם בסיס.

6. $[T]_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - אפשר לסמוך על תשובות הסטודנטים.

7.

א. נוכיח: $\{v, T(v)\}$ בת"ל : $\alpha_1 v + \alpha_2 T(v) = 0$ (1) נפעיל T על שני האגפים : $T(\alpha_1 v + \alpha_2 T(v)) = T(0)$ לפי תכונות הע"ל: $\alpha_1 T(v) + \alpha_2 T^2(v) = T(0)$ ולכן $\alpha_1 T(v) - \alpha_2 v = 0$. נפעיל שוב את T $-\alpha_1 v + \alpha_2 T(v) = 0$ (2) מתוך משוואות 1 ו-2 נקבל $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

ב. נבחר $B = \{v, T(v)\}$ ואז : $[T]_B = [T(v) \quad T^2(v)] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$