פתרון תרגיל 6 חדוא 2

<u>שאלה 1</u>:

ראשית נחשב את הנגזרות:

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\ f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x)=\frac{-2}{(1-x)^3},\ f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4}$$

כעת נחשב את השגיאה של $f(0.1)$ בפולינום טיילור מסדר 2 סביב 0.

$$R_2(0.1)=f(0.1)-p(0.1)=\frac{f'''(c)}{3!}0.1^3$$

כאשר $0<c<0.1$

לכן

$$|R_2(0.1)|=\frac{1}{(1-c)^4}0.1^3<\frac{1}{(1-0)^4}0.1^3=0.1^3$$

<u>שאלה 2</u>:

תזכורת טורי טיילור ידועים נמצאים <u>בקישור הבא</u> מויקיפדיה

א. נזכור שאמרנו בכיתה שעבור $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ מתקיים כי $f^{(n)}(0)=0$ לכל n.

כיוון שכל הנגזרות מתאפסות באפס, פולינום הטיילור של הפונקציה הוא 0, מכל סדר n.

לכן עבור $x\neq 0$ מתקיים $e^{-\frac{1}{x^2}}=0+o(x^4)$.

כמו כן, $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}{x^4}+\frac{o(x^4)-o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{0^+}+0=\infty$$

ב. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+o(x^2)\right)-x}{x\left(x+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2+xo(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+x\frac{o(x^2)}{x^2}}=0$$

ג.

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)\overset{x=\frac{1}{n}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+x\right)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

ד. נשים לב כי $\sin(x)=x+o(x^2)$ ולכן $\sin(x^2)=x^2+o(x^4)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-\sin\left(x^2\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^2-\left(x^2+o(x^4)\right)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2+2\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)o(x^4)+\left(o(x^4)\right)^2-\left(x^2+o(x^4)\right)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2x^4}{3!}}{x^4}+\frac{\frac{x^6}{36}+2\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)o(x^4)+\left(o(x^4)\right)^2-o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3}+0=-\frac{1}{3}$$

ה. נשים לב כי $f(x)=\sqrt[4]{1+x},\ f'(x)=\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}},\ f''(x)=-\frac{3}{16}(1+x)^{-\frac{7}{4}}$

ולכן $\sqrt[4]{1+x}=1+\frac{1}{4}x-\frac{3}{16\cdot 2!}x^2+o(x^2)$

באופן דומה אנו מקבלים כי $\sqrt[4]{1-x}=1-\frac{1}{4}x-\frac{3}{16\cdot 2!}x^2+o(x^2)$

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{7}{4}}\left(\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{7}{4}}x^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}-2\right)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt[4]{1+t}+\sqrt[4]{1-t}-2}{t^2}=$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{4}t-\frac{3}{16\cdot 2!}t^2+o(t^2)\right)+\left(1-\frac{1}{4}t-\frac{3}{16\cdot 2!}t^2+o(t^2)\right)-2}{t^2}=-\frac{3}{16}$$

ו.

$$\sin(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5) \qquad \sin(2x)=2x-\frac{2^3}{3!}x^3+\frac{2^5}{5!}x^5+o(x^5)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \qquad e^{\frac{2x^2}{3}}=1+\frac{2x^2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{3}\right)^2+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)e^{\frac{2x^2}{3}}-2x}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x-\frac{8}{3!}x^3+\frac{32}{5!}x^5+o(x^5)\right)\left(1+\frac{2x^2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}x^4+o(x^4)\right)-2x}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x+\frac{4x^3}{3}+\frac{4}{9}x^5+2x\cdot o(x^4)\right)-\frac{8}{3!}\left(x^3+\frac{2x^5}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}x^7+x^3o(x^4)\right)}{x^5}+$$

$$+\frac{\frac{32}{5!}\left(x^5+\frac{2x^7}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}x^9+x^5\cdot o(x^4)\right)-2x}{x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{4}{9}-\frac{8}{3!}\cdot\frac{2}{3}+\frac{32}{5!}\right)x^5+o(x^5)}{x^5}=-\frac{8}{45}$$

ז.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin(x)-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+xo(x^2)\right)-\frac{1}{6}\left(x^3+x^4+\frac{1}{2}x^5+x^3o(x^2)\right)}{x^3}+$$

$$+\frac{o(x^3)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-x(1+x)}{x^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ח. ראשית נחשב את הנגזרות, על מנת למצוא את פולינום טיילור

$$f(x)=\left(\cos(x)\right)^{\sin(x)}=e^{\left(\sin(x)\ln\left(\cos(x)\right)\right)} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=f(x)\left(\cos(x)\ln\left(\cos(x)\right)-\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right) \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=f'(x)\left(\cos(x)\ln\left(\cos(x)\right)-\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right)+f(x)\left(-\sin\left(x\right)\ln\left(\cos(x)\right)-\sin(x)-\frac{2\sin(x)\cos^2(x)+\sin^3(x)}{\cos^2(x)}\right)$$

$$f''(0)=0$$

$$f'''(x)=f''(x)\left(...\right)+f'(x)\left(...\right)+f'(x)\left(...\right)+$$
$$+f(x)\left(-\cos(x)\ln(\cos(x))+\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}-3\cos(x)-\frac{3\sin^2(x)\cos^3(x)+2\cos(x)\sin^4(x)}{\cos^4(x)}\right)$$

$$f'''(0)=-3$$

ולכן סה"כ מתקיים כי $f(x)=1-\frac{3}{3!}x^3+o(x^3)$ ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(\cos(x)\right)^{\sin(x)}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

שאלה 3:

נחשב את הנגזרות על מנת לחשב את פולינום הטיילור.

$$f(x)=(1+x)^{x^2}=e^{x^2\ln(1+x)} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=f(x)\left(2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}\right) \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=f'(x)(...)+f(x)\left(2\ln(1+x)+\frac{2x}{1+x}+\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}\right)=f'(x)(...)+f(x)\left(2\ln(1+x)+\frac{3x^2+4x}{(1+x)^2}\right)$$

$$f''(0)=0$$

$$f'''(x)=f'(x)(...)+f''(x)(...)+f(x)\left(\frac{2}{1+x}+\frac{2(x+2)}{(1+x)^3}\right) \qquad f'''(0)=6$$

ולכן עבור $n=1,2$ מתקיים כי $f(x)=1+o(x^n)$ ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=0$$

עבור $n=3$ מתקיים כי $f(x)=1+\frac{6}{3!}x^3+o(x^3)$ ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{x^3}=1$$

עבור $n>3$ מתקיים כי $f(x)=1+x^3+a_4x^4...+o(x^n)$ ולכן

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+a_4x^4...+o(x^n)}{x^3}\frac{1}{x^{n-3}}=1\cdot\infty=\infty$$

שאלה 4:

א.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot(x)-\frac{1+ax^2}{x+bx^3}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+bx^3\right)\cos(x)-\left(1+ax^2\right)\sin(x)}{x^4\left(x+bx^3\right)\sin(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+bx^3\right)\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\right)-\left(1+ax^2\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)}{x^4\left(x+bx^3\right)\left(x+o(x^2)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5+xo(x^5)+bx^3-\frac{b}{2}x^5+\frac{b}{24}x^7+bx^3o(x^5)}{x^6+bx^8+x^5o(x^2)+bx^7o(x^2)}-$$
$$-\frac{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)+ax^3-\frac{a}{6}x^5+\frac{a}{120}x^7+ax^2o(x^6)}{x^6+bx^8+x^5o(x^2)+bx^7o(x^2)}$$

על מנת שיהיה גבול סופי, החזקות שקטנות מ6 צריכות להצטמצם (אחרת הגבול יהיה אינסופי כי המכנה קטן משמעותית מהמונה – הוכחה לפי הוצאת החזקה המשמעותית כלומר הקטנה ביותר), ולכן

$$x^3: \qquad -\frac{1}{2}+b+\frac{1}{6}-a=0$$

$$x^5: \qquad \frac{1}{24}-\frac{b}{2}-\frac{1}{120}+\frac{a}{6}=0$$

$$a-b=-\frac{1}{3}$$
$$a-3b=-\frac{1}{5}$$

ולכן $b=-\frac{1}{15}$, $a=-\frac{6}{15}$

כיוון שאין חזקת 6 במונה, נובע שהגבול במקרה זה יהיה אפס.

ב. ג

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(a+be^{x}+be^{-x}\right)\sin(x)-x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(a+b\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)+b\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)\right)-x}{x^4}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(a+2b+bx^2+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^4\right)\right)-x}{x^4}$$

אנחנו רוצים שהחזקות שקטנות מ4 יצטמצמו ולכן

$x:\qquad a+2b-1=0$

$x^3:\qquad b-\frac{a+2b}{6}=0$

$a+2b=1$
$a-4b=0$

ולכן $a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{6}$.

הגבול הוא המקדם של x^4 ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}e^{x}+\frac{1}{6}e^{-x}\right)\sin(x)-x}{x^4}=0$$

ג.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin(x)-ax^2-bx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-ax^2-bx}{x^3}=$$

אנו רוצים שכל החזקות שקטנות מ3 יצטמצמו ולכן

$x:\qquad 1-b=0$

$x^2: \quad 1-a=0$

ולכן $a=b=1$.

הגבול יהיה המקדם של x^3 ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin(x)-x^2-x}{x^3}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

ד.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-a\cos\left(x^2\right)+bx^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^2-a\left(1-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)+bx^2}{x^4}$$

אנו רוצים שכל החזקות הקטנות מ4 יצטמצמו ולכן

$1: \quad 1-a=0$

$x^2: \quad -1+b=0$

כלומר $a=1, b=1$.

הגבול הוא המקדם של x^4 ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-\cos\left(x^2\right)+\frac{1}{4}x^2}{x^4}=\frac{2}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

<u>שאלה 5</u>:

על מנת שהפונקציה תהא רציפה, צריך להתקיים כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sin(x)}-\frac{1}{e^x-1}=c$$

נחשב עבור איזה ערך של a הגבול קיים וסופי, וזה יהיה הערך של c.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sin(x)}-\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{a\left(e^x-1\right)-\sin(x)}{\sin(x)\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{a\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x+o(x^2)\right)}{x\left(x+o(x)\right)}$$

כל החזקות שקטנות מ2 צריכות להצטמצם, ולכן $a=1$ והגבול הוא $\frac{a}{2}$ ולכן $c=\frac{1}{2}$.