

יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.

משך הבחינה: שלוש שעות.

1. נתונה תבנית ריבועית  $Q(x, y) = -3x^2 + 4xy - 6y^2$ .
  1. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה  $Q(x, y) = -1$ . מהי צורת העקומה?
  2. מהי העקמומיות הכוללת של עקומה זו?
  3. מהי צורת המשטח המתקבל כגרף של התבנית הריבועית  $z = Q(x, y)$ ?
  4. חשב את עקמומיות גאוס של הגרף בנקודה  $(0, 0, 0)$ .
  
2. יהי  $M \subset \mathbb{R}^3$  משטח עם פרמטריזציה  $x(u^1, u^2)$ .
  1. תנו שלושה דרכים של חישוב של עקמומיות גאוס של  $M \subset \mathbb{R}^3$ .
  2. נניח שהמטריקה היא  $\frac{c^2}{y^2}(dx^2 + dy^2)$  כאשר  $x = u^1$  ואילו  $y = u^2$ , וחשב את עקמומיות גאוס  $K = K(x, y)$  שלה.
  3. נניח שמטריקה היא  $(\sin^2 \varphi)(d\theta^2) + d\varphi^2$  כאשר  $\theta = u^1$  ואילו  $\varphi = u^2$ , וחשב את עקמומיות  $K = K(\theta, \varphi)$  של המטריקה.
  
3.
  1. לגבי משטח  $M$  עם מקדמים  $g_{ij}$  של תבנית יסודית ראשונה, הגדר את אלמנט השטח  $dA$  שלה.
  2. בטאו משפט גאוס-בוננה לגבי משטח סגור קמור  $M$ .
  3. לגבי משטח  $M_1 \subset \mathbb{R}^3$  מוגדר על ידי משוואה  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  מצאו את האינטגרל  $\int_{M_1} K dA$ .
  4. לגבי  $M_2 \subset \mathbb{R}^3$  מוגדר ע"י  $(x^2 + y^2 + 2z^2 - 1)((x - 10)^2 + y^2 + 2z^2 - 1) = 0$  מצאו את האינטגרל  $\int_{M_2} K dA$ .
  
4. יהי  $D_p$  (עם  $p = 0$ ) מרחב של פונקציות  $f = f(u)$  כאשר  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
  1. הגדר מושג של דריבציה  $X: D_p \rightarrow \mathbb{R}$ .
  2. הוכח ש דריבציה  $X$  בהכרח מתאפסת על פונקציות  $f$  קבועות.
  3. יהי  $u = u^1$  פולינום מוני בדרגה 1, ונניח  $C = X(u)$ . לכל  $f \in D_p$ , בטא  $X(f)$  באמצעות  $C = X(u)$  וגם  $\frac{d}{du}$  מיושם ל  $f = f(u)$ .
  4. מצא ממד של מרחב הדריבציות של  $D_p$ .
  
5. כתוב את הביטויים הבאים באמצעות  $\Gamma_{ij}^k, L_\ell^k$ , וגם  $L_{ij}$ :
  1.  $\langle x_{ij}, x_k \rangle g^{ik}$ .

$$\cdot \langle n_j, x_{\ell k} \rangle \quad .2$$

$$\cdot \langle n, x_{pq} \rangle g^{qs} \quad .3$$

$$\cdot i, j, k = 1, 2, \dots, n \quad \text{כאשר} \quad \delta_j^i \delta_k^j \delta_i^k \quad .4$$

**בהצלחה!**