אנליזה 1 תשפ מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x+\sin(x))}{x+\sin(x)} \cdot \frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)} \cdot \frac{x\,(x+\sin(x))}{(3x)^2}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

כאשר הגבול האחרון מחושב

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,(x+\sin(x))}{(3x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{9} \frac{(x+\sin(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{9}\left(1+\frac{\sin(x)}{x}\right) = \frac{1}{9}(1+1)$$

(ב) $\lim_{x\to\infty} x^{\left(e^{-x}\right)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\left(e^{-x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(x^{\left(e^{-x}\right)}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{e^{-x}\ln(x)} = e^{\lim_{x\to\infty}\left[e^{-x}\ln(x)\right]}$$

כעת נחשב

$$\lim_{x\to\infty} \left[e^{-x}\ln(x)\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = 0$$

ולכן הגבול בסה"כ שווה ל $e^0 = 1$.

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n = \frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!\cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 2\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = 2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} = 2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to 2\cdot 1\cdot e^{-1}$$

וכיוון ש $\frac{2}{e} < 1$ נקבל ש $\lim a_n = 0$.

2. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(a+x)}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{x}=a$$

לכל a, מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{x}=\begin{cases}\text{לא מוגדר} & a<0\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}=\left\{\frac{-\infty}{0^+}\right\}=-\infty & a=0\\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 & a=1\\ =\left\{\frac{\ln a}{0}\right\}=\pm\infty & \text{אחרת}\end{cases}$$

ולכן רק עבור $a=1$ מתקיים השיוויון הדרוש.

(ב) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלו?

פתרון: פונקציה שגזירה בנקודה, רציפה בה. לכן נבדוק רק עבור $a=1$ (שזה המקרה היחיד בו f רציפה ב $x=0$) אם f גזירה ב $x=0$. לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

כלומר f גזירה ב $x=0$ עבור $a=1$ ומתקיים $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

3. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}$ וכן $a_1=\frac{1}{2}$.

(א) הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n<1$.

פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1=\frac{1}{2}$ והוא קטן ממש מ 1.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n<1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1}<1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}<\frac{1^3+1}{2}=1$$

כאשר אי השיוויון נובע מהנחת האינדוקציה.

(ב) חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים $0<a_n$:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1=\frac{1}{2}$ והוא חיובי.
- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר a_n חיובי. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר a_{n+1} חיובי. לפי הגדרה:

$$a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}<\frac{1^3+1}{2}=1$$

ומכיוון ש $a_n>0$ (לפי הנחת האינדוקציה) וכפל/חילוק וחיבור של חיוביים הוא חיובי נקבל שגם a_{n+1} חיובי.
כעת- טענה: הסדרה מונוטונית יורדת. הוכחה: לפי הגדרה $a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}$ ולכן

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^3+a_n}{2}-a_n=\frac{a_n^3-a_n}{2}=a_n\left(\frac{a_n^2-1}{2}\right)=\frac{a_n\left(a_n+1\right)\left(a_n-1\right)}{2}<0$$

שהרי $\left(a_n-1\right)$ שלילי לפי סעיף קודם וכל שאר הגורמים חיוביים. כלומר, אכן קיבלנו שהסדרה מונוטונית יורדת.
כיוון שהסדרה חסומה ע"י 0 יש לסדרה גבול סופי שנסמנו L. כלומר $a_n\to L$ ולכן גם $a_{n+1}\to L$ ולפי הגדרה נקבל

$$L\leftarrow a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}\to\frac{L^3+L}{2}$$

כלומר $L=\frac{L^3+L}{2}$. נעביר אגף ונוציא גורם משותף לקבל

$$0=L\left(\frac{L^2+1}{2}-1\right)=L\left(\frac{L^2-1}{2}\right)=L\frac{\left(L-1\right)\left(L+1\right)}{2}$$

ולכן $L\in\{0,1,-1\}$. כיוון ש $a_1=\frac{1}{2}$ והסדרה יורדת, האפשרות $L=1$ נפסלת. בנוסף, ראינו שלכל n מתקיים $0<a_n$ ולכן $0\leq L$ וזה פוסל את האפשרות $L=-1$. נשארנו עם אפשרות אחת שהיא $L=0$.

4. קבעו לכל ערך $a\in\mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $x^3-3x=a$ (הפרידו למקרים).
פתרון: נגדיר פונקציה
$$f(x)=x^3-3x-a$$
ונשאל שאלה שקולה: לכל ערך של a, כמה שורשים יש ל $f(x)$. נגזור

$$f'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)=3\left(x-1\right)\left(x+1\right)$$

ולכן, ±1 הן הנקודות היחידות בהן $f'=0$ ונסתכל בטבלה

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

להסיק כי f עולה ממש בקרן $(-\infty-1)$ ובקרן $(1,\infty)$ויורדת ממש בקטע $(-1,1)$ ולכן בכל אחד מהקטעים/קרנות הנ"ל f

יכולה להיחתך לכל היותר פעם אחת בלבד עם ציר x (כלומר שורש אחד לכל היותר). מתקיים כי

$$f(-1) = 2 - a$$
$$f(1) = -2 - a$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

(הגבולות נובעים מכך ש f פולינום ממעלה אי זוגית, 3). ולכן:

- עבור $a < -2$ נקבל ש $f(-1) > 0, f(1) > 0$ ולכן ב $(-\infty - 1]$ הפונקציה מחליפה סימן (לפי הגבול קיימת נקודה בקרן זו ב f שלילית) ולא מתאפסת ב -1 ולכן חותכת פעם אחת בלבד את ציר x כי בקרן זו f רציפה + משפט ערך הביניים + חח"ע (חח"ע בגלל שעולה/יורדת ממש). בקטע $[-1, 1]$ הפונקציה f יורדת ובקרן $(1, \infty)$ עולה ומכיוון ש $f(1) > 0$ נקבל שבקרן $(-1, \infty)$ אין חיתוך עם ציר x. לסיכום: במקרה זה יש שורש יחיד (בקרן $(-\infty, -1]$).
- עבור $a = -2$ נקבל ש $f(-1) > 0, f(1) = 0$ כמו מקודם תהיה נקודת חיתוך יחידה בקרן $(-\infty, -1]$ ופעם יחידה בקרן $(-1, \infty)$ (בנקודה 1) ולכן סה"כ יהיו שני שורשים.
- עבור $-2 < a < 2$ נקבל ש $f(-1) > 0, f(1) < 0$ כמו מקודם תהיה נקודת חיתוך יחידה בקרן $(-\infty, -1]$ ובאופן דומה תהיא נקודת חיתוך יחידה ב $[-1, 1]$ (בקטע זה fמחליפה סימן ולא מתאפסת ב ± 1) ובאופן דומה תהיה נקודת חיתוך יחידה ב $[1, \infty)$ (שהיא לא 1) ולכן בסה"כ יהיו 3 שורשים.
- עבור $a = 2$נקבל ש $f(-1) = 0, f(1) < 0$ ובאופן דומה יהיו שני שורשים (אחד ב -1 ואחד בקרן $[1, \infty)$).
- עבור $a > 2$ נקבל ש $f(-1) < 0, f(1) < 0$ ובאופן דומה יהיה שורש יחיד בקרן $[1, \infty)$.

5. תהיא f פונקציה שגזירה בכל $\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם הנגזרת f' היא פונקציה עולה אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
פתרון: הפרכה: $f(x) = 2$ מקיימת כי $f'(x) = 0$ עולה אבל $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2 \neq \infty$

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם הנגזרת f' היא פונקציה חיובית ועולה אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
פתרון: הוכחה: כיוון ש $f' > 0$ חיובית נסיק ש f עולה בכל $\mathbb{R}$. נוכיח $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ לפי ההגדרה. יהיה M נתון ונראה שהחל ממקום מסוים $f(x) > M$. טענה: קיים x_0 המקיים $f(x_0) > M$ ואז החל ממנו, כיוון ש f עולה, מתקיים $f(x) > M$.
הוכחה: נניח בשלילה שלכל x מתקיים $f(x) \le M$ ובפרט לכל x חיובי מתקיים $M \ge f(x) \ge f(0)$ (כי f עולה). לכן

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

כגבול של חסומה ($f(x)$) כפול $\frac{1}{x}$ ששואפת ל 0 (כאשר $x \to \infty$) ולכן גם

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{f(0)}{x} = 0 - 0 = 0$$

. מצד שני, לפי משפט לגרנז לכל $x > 0$ קיים c כך ש

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

אבל $f'(0) > 0$ ו f' עולה ולכן $f'(c) > f'(0)$ ולכן $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} > f'(0)$ ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq f'(0) > 0$$

סתירה.