אלגברה מופשטת 1 ־ תרגיל 7

21 בדצמבר 2015

1. הוכיחו את הסעיפים הבאים:
א. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7$.
ב. $GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^\times$ לכל שדה F.
ג. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$, כאשר $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$ חבורה ביחס לכפל.
פתרון:
א. נבנה אפימורפיזם $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$ ע"י $\varphi(n) = n \mod 7$.
קל לראות שהגרעין של ההומומורפיזם הוא בדיוק $7\mathbb{Z}$, ולכן לפי משפט האיזו' הראשון $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7$.
ב. נבנה אפימורפיזם $\varphi : GL_n(F) \to F^\times$ ע"י $\varphi(A) = \det(A)$.
קל לראות שהגרעין של האפימורפיזם הוא בדיוק $SL_n(F)$ ולכן לפי משפט האיזו' הראשון $GL_n(F)/SL_n(F) \cong F^\times$.
ג. נבנה אפימורפיזם $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, ע"י $\varphi(r) = e^{i2\Pi r}$.
קל לראות שהגרעין הוא בדיוק $\mathbb{Z}$, ולכן לפי משפט האיזו' הראשון, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$.

2.הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. במקרים בהם הטענה נכונה מצאו את ההומומורפיזם המתאים ואת הגרעין שלו.
א. קיים אפימורפיזם מS_{14} לחבורה מסדר 34.
ב. קיים אפימורפיזם $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{60}$.
ג. קיים אפימורפיזם $\varphi : \mathbb{Z}_{60} \to \mathbb{Z}_{12}$.
ד. קיים אפימורפיזם $\varphi : D_6 \to U_{13}$.
ה. קיים מונומורפיזם $\varphi : \mathbb{Z}_{24} \to S_4$.
פתרון:
א. ראינו שאם קיים אפי' מחבורה G לחבורה H, אז $G/K \cong H$ לאיזשהי $K \trianglelefteq G$.
בפרט, הסדר של H חייב לחלק את הסדר של G.
אבל $|S_{14}| = 14!$, ו $34 \nmid 14!$.
ב. כן. $\varphi(n) = n \mod 60$. הגרעין: $\ker\varphi = 60\mathbb{Z}$.
ג. כן. $\varphi(n) = n \mod 12$. צריך לבדוק שזה מוגדר היטב. כלומר, שאם $n \mod 60 = m \mod 60$ אז $\varphi(n) = \varphi(m)$.
כלומר, צריך להראות $60|n-m$ אז $12|n-m$. אבל זה כמובן נכון.
$\ker\varphi = 12\mathbb{Z}_{60}$.
ד. $|U_{13}| = 12$, ולכן אם קיים אפימורפיזם הוא בהכרח איזומורפיזם. אבל D_6 ו U_{13} לא איזומורפיים, למשל כי U_{13} אבלית ו$D6$ לא.
ה. $|S_4| = 24$. ולכן אם קיים מונומורפיזם הוא בהכרח איזומורפיזם. אבל $\mathbb{Z}_{24}$ ו S_4 לא איזומורפיים, למשל כי $\mathbb{Z}_{24}$ אבלית ו S_4 לא.

3. ענו על השאלה הבאה:

תהי $H \leq G$, הראו כי $Z(H) \supseteq Z(G) \cap H$, ותנו דוגמא שבה זאת הכלה אמיתית.

פתרון: יהי $x \in Z(G) \cap H$. $x \in Z(G)$ ולכן לכל $g \in G$ $xg = gx$. בפרט לכל $h \in H$ $xh = hx$. כלומר, $x \in H$ מקיים שלכל $h \in H$ $xh = hx$, שזה בדיוק ההגדרה של $Z(H)$, ולכן $x \in Z(H)$.

דוגמא: נסתכל על $G = D_4$, $H = \langle \sigma \rangle$. H ציקלית ובפרט אבלית, ולכן $Z(H) = \langle \sigma \rangle$. אולם, כידוע $Z(D_4) = \langle \sigma^2 \rangle$, ולכן $Z(G) \cap H = \langle \sigma^2 \rangle \subset \langle \sigma \rangle$.

4. תהי $Q_8 = \{i, j, k, -i, -j, k, 1, 1\}$ החבורה עם פעולת הכפל הבאה:
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.
חבורה זאת נקראת חבורת הקווטרניונים.
א. בנו את טבלת הכפל שלה.
ב. מצאו את כל תת החבורות שלה, והוכיחו שכולן נורמליות.
שימו לב, זאת דוגמא לחבורה לא אבלית, שכל תת החבורות שלה נורמליות.
ג. הוכיחו שQ_8 לא איזומורפית לD_4.
פתרון:

א.

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	i	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	i	1	-1

ב. $\langle i \rangle = \{i, -1, -i, 1\}$ נורמלית כי היא מאינדקס 2.
$\langle j \rangle = \{j, -1, -j, 1\}$ נורמלית כי היא מאינדקס 2.
$\langle k \rangle = \{k, -1, -k, 1\}$ נורמלית כי היא מאינדקס 2.
$\langle -1 \rangle = \{-1, 1\}$ נורמלית כי היא למעשה שווה למרכז.
ויש כמובן את תת החבורות הטריוויאליות, שהן תמיד נורמליות.
ג. בD_4 יש רק שני איברים מסדר 4, בעוד שבQ_8 יש 6 איברים מסדר 4.

5. ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי G חבורה עם תת חבורה H ותת חבורות נורמליות N, N'. הוכיחו:
אם $N \cap H = N' \cap H$ אזי $(HN)/N \cong (HN')/N'$.
ב. תהי G חבורה ו $N \lhd G$. נניח ש G/N ו N אבליות. תהי $H \leq G$ תת חבורה כלשהי. הוכיחו שקיימת $K \lhd H$ כך ש K ו H/K אבליות.
פתרון:
א. לפי משפט האיזומורפיזם השני $HN/N \cong H/(H \cap N)$, וכן $HN'/N' \cong H/(H \cap N')$, אבל נתון ש $N \cap H = N' \cap H$ לכן $(HN)/N \cong (HN')/N'$.
ב. נקח את K להיות $N \cap H$. $K \leq N$ ולכן אבלית. כמו כן, $H/K = H/(H \cap N) \cong HN/N \leq G/N$ ולכן אבלית.

6. ענו על הסעיפים הבאים:
א. תנו דוגמא נגדית לטענה השגויה הבאה: אם $A, B \lhd G$ ו $G/A \cong B$ אז $G/B \cong A$.

ב. נניח G ו $K \lhd G$ ו $G/K \cong \mathbb{Z}$. הוכיחו שלכל n טבעי קיימת ב G תת חבורה מאינדקס n.

פתרון:

א. נקח $G = D_4$ ובתוכו את שתי תתי החבורות הבאות: $A = \langle\sigma\rangle$ ו $B = \langle\sigma^2\rangle$.
$G/A = D_4/\langle\sigma\rangle \cong \langle\sigma^2\rangle$ כי זאת חבורה מסדר 2, וכל החבורות מסדר 2 איזומרפיות זו לזו.

אולם, $G/B = D_4/\langle\sigma^2\rangle$ לא יכול להיות איזומורפי ל $\langle\sigma\rangle$ כי זאת חבורה ציקלית, ו $\langle\sigma^2\rangle = Z(D_4)$, וראינו בתרגול שחבורה לא אבלית מודולו המרכז שלה לא יכול לצאת חבורה ציקלית.

7. תהי G חבורה (לא בהכרח סופית) ותהיינה $A, B \lhd G$. הוכיחו או הפריכו:

א.אם $A \cong B$ אז $G/A \cong G/B$.

ב. אם $G/A \cong G/B$ אז $A \cong B$.

ג. אם $G/A \cong G$ אז A היא החבורה הטריוויאלית.

מסקנה: טיפוס האיזומורפיזם של A אינו קובע את טיפוס האיזומורסיזם של G/A, וכן להפך.

פתרון:

א. נקח $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ו $A = \mathbb{Z}_2 \times 0$, $B = 0 \times 2\mathbb{Z}_2$.

$A \cong B$ כי שתיהן חבורות מסדר 2.

אולם, $G/A \cong \mathbb{Z}_4$, ואילו $G/B \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. שהן כידוע לא איזומורפיות.

ב. נקח $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ו $A = \mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_2$ ו $B = 0 \times \mathbb{Z}_4$.

אז, $G/A \cong G/B \cong \mathbb{Z}_2$ (כי זאת החבורה היחידה עם שני איברים.

אבל $A \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ו $B \cong \mathbb{Z}_4$ והם כידוע לא איזומורפיים.

ג. אם G היא חבורה סופית, הטענה נכונה, כי $|G| : |A| = |G|$ ולכן $|A| = 1$.

נראה שבחבורה אינסופית הטענה לא נכונה.

נסתכל על $\mathbb{C}^\times$, ובתוכה על $A = \{1, -1\}$. כמובן שA היא לא החבורה הטריוויאלית.

נוכיל ש $\mathbb{C}^\times/A \cong \mathbb{C}^\times$.

לצורך כך, נסתכל על העתקה הבאה מ $\mathbb{C}^\times$: $\varphi(x) = x^2$. קל לראות שזה אפימורפיזם, והרעין שלו הוא בדיוק $\{1, -1\}$.

לכן לפי משפט האיזו' הראשון $\mathbb{C}^\times/A \cong \mathbb{C}^\times$.