

תרגיל 10 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. תהי E/F הרחבת שדות וניקח $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$. הוכיחו כי אם σ מקבעת את השדות L ואת K היא מקבעת גם את $K \cdot L$ (השדה הכי קטן שמכיל את שניהם).
פתרון: די טריוויאלי כי אם

$$L, K \subseteq E^\sigma$$

אז בגלל ש E^σ שדה בעצמו נקבל ש

$$K \cdot L \subseteq E^\sigma$$

2. מצאו את חבורת גלואה של הפולינום $x^5 - 6x + 3$ (כלומר, מצאו את חבורת גלואה $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E שדה הפיצול של הנ"ל).
הדרכה: השתמשו בכלים מאינפי כדי למצוא כמה שורשים ממשיים יש לפולינום ואז השתמשו בתרגיל בהתרגול הקודם.
פתרון: הנגזרת של הפולינום היא $5x^4 - 6$ שזה פולינום שיש לו רק שני שורשים ממשיים. לפי הנגזרת השניה קל לבדוק כי לפולינום $x^5 - 6x + 3$ יש 2 נקודות קיצון ב $x = \pm \sqrt[4]{\frac{6}{5}}$ בנוסף קל לראות ש

$$f\left(\sqrt[4]{\frac{6}{5}}\right) < 0, \quad f\left(-\sqrt[4]{\frac{6}{5}}\right) > 0$$

אז מחקירת הפונקציה ניתן לראות שיש לו 3 שורשים ממשיים. בנוסף זה פולינום אי פריק לפי איזנשטיין. לפי תרגיל מהתרגול הקודם חבורת גלואה היא S_5 .

3. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול E . נניח שחבורת גלואה $\text{Gal}(E/F)$ היא אבליה. יהי a שורש של $f(x)$ הוכיחו:

(א) $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה.

פתרון: $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה אם ורק אם $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}(a)) \leq \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ היא תת חבורה נורמלית וזה אכן קורה כי $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ אבליה ולכן כל תת חבורה שלה נורמלית.

(ב) $E = \mathbb{Q}(a)$

פתרון: נסמן את שורשי הפולינום $f(x)$ ב $a = a_1, \dots, a_k$. כזכור חבורת גלואה פועלת טרנזיטיבית על השורשים כלומר יש $\varphi \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כך ש

$$\varphi(a) = a_i$$

אבל בגלל ש $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ נורמלית. אפשר לצמצם את φ ל $\mathbb{Q}(a)$. ולכן $a_i \in \mathbb{Q}(a)$ ובזה סיימנו.

4. מצאו את כל שדות הביניים של ההרחבה E/\mathbb{Q} כאשר E שדה הפיצול של $(x^2 - 3)(x^2 - 2)$. ציירו את הסריג של שדות ביניים. קבעו אילו מהם מהווים הרחבה נורמלית מעל \mathbb{Q} .
פתרון: כזכור $G = \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ היא החבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ שיש לה 3 תתי חבורות לא טריוויאליות. שורשי הפולינום הם הרי

$$\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$$

חישוב של E^H לכל תת חבורה מגלה לנו כי שדות הביניים (חוץ מ- \mathbb{Q}) הם

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{6})$$

כולם נורמליים כמובן.