שיעורי בית 3

.

1. הכרה של עוד חבורות:

(א) הקווטרניונים: נגדיר

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת קומטטיבית?

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}:\ det(A)=a^2+b^2\neq 0\right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת קומטטיבית?

2. תזכורת מש.ב. הקודמים: עבור $\sigma\in S_n$ ומחזור $(i_1,i_2,\dots i_m)\in S_n$ מתקיים השיוויון $\sigma\,(i_1,i_2,\dots i_m)\,\sigma^{-1}=(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m))$

(א) יהא $n>2$. הוכיחו כי לכל מחזור $\tau\in S_n$ מאורך לפחות 2 קיימת תמורה $\sigma\in S_n$ כך ש $\sigma\tau\neq\tau\sigma$

(ב) יהא $n>2$. הוכיחו כי $Z(S_n)=\{id\}$

3.

(א) תהא G חבורה ציקלית. הוכיחו כי G קומטטיבית.

(ב) הוכח כי S_n אינה ציקלית עבור $n>2$

4. הגדרה: יהיו $(G_1,\star),(G_2,*)$ חבורות אזי גם $G_1\times G_2=\{(g_1,g_2)\,|\,g_1\in G_1,\,g_2\in G_2\}$ חבורה ביחס לפעולה $\bullet$ המוגדרת $(g_1,g_2)\bullet(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)=(g_1\star\tilde{g}_1,g_2*\tilde{g}_2)$. היחידה היא (e_{G_1},e_{G_2}) וההופכי של כל איבר $(g_1,g_2)\in G_1\times G_2$ הוא $(g_1,g_2)^{-1}=\left(g_1^{-1},g_2^{-1}\right)$. לחבורה זאת קוראים המכפלה (הקרטיזית) של G_1 ו G_2. למשל, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ שראינו בתירגול.

(א) הוכיחו כי $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ אינה צקילית עבור $n>1$

(ב) יהיו G_1,G_2 חבורות הוכח/הפרך: אם $G_1\times G_2$ ציקלית אז גם G_2 וגם G_1 ציקלית.

(ג) יהיו G_1,G_2 חבורות הוכח/הפרך: אם G_1 וגם G_2 ציקליות אז $G_1\times G_2$ ציקלית.

5. הוכח כי החבורות הבאות אינן ציקליות

(א) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

(ב) $\mathbb{Q}$

6. ב S_5 מצאו את הסדרים של

(א) $\sigma=(1,3,2)$

(ב) $\sigma=(1,2)(3,4,5)$

(ג) $\sigma=(1,2)(3,4,2)$

(ד) באופן כללי:תהא $\sigma\in S_n$ ו $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ הפירוק למחזורים זרים. אזי $o(\sigma)=lcm\left\{o(\tau_i)\right\}_{i=1}^m$ (כאשר lcm הוא המכפלה המשותפת המינמאלית. למשל $lcm\{2,8,20,10\}=40$)

7. תהא G חבורה סופית. יהיו $a,b\in G$. הוכח/הפרך

(א) אם a,b מתחלפים אז $o(ab)=o(a)\cdot o(b)$

(ב) $\left\langle a\right\rangle=\left\langle a^3\right\rangle$

(ג) אם $b=a^4$ אזי $\langle ab\rangle\subseteq\langle a\rangle$

ד) $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$

8. תהא G חבורה. $g \in G$. נניח כי $g^k = e$. הוכח כי

$$o(g)|k$$

כלומר הסדר של g מחלק את k.
הדרכה: בצע חילוק עם שארית של k ב $o(g)$

9. תהא G חבורה חילופית. יהיו $a, b \in G$ בעלי סדרים זרים. כלומר, נסמן $o(a) = n, o(b) = m$ אזי $\gcd(n,m) = 1$ (ל n, m אין מחלק משותף פרט ל־1). הוכח כי

$$o(ab) = m \cdot n$$

היעזר בתרגיל מספר 8

10. כמה כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ (עם פעולת חיבור מדולו 6)?

11. תהא G חבורה ויהא $g \in G$ מסדר n. הוכיחו כי $o(g^k) = \frac{n}{\gcd(k,n)}$