89-198 מתמטיקה בדידה – תרגיל 5 פתרון

<u>שאלה 1</u>:

מה מספר הדרכים להושיב 14 אנשים כך ש:

א. 8 אנשים יושבים סביב שולחן עגול והיתר סביב שולחן עגול אחר?

ב. 8 אנשים יושבים סביב שולחן עגול והיתר על ספסל?

<u>פתרון שאלה 1</u>:

מספר האפשרויות לבחור 9 אנשים מתוך 61 (ללא חזרות, בלי חשיבות לסדר) הוא $\binom{16}{9}$.

מספר האפשרויות לסדר 9 אנשים סביב שולחן עגול הוא $8! = \frac{9!}{9}$.

א. מספר האפשרויות לסדר 7 אנשים סביב שולחן עגול הוא $6! = \frac{7!}{7}$.

נקבל $\binom{16}{9} \cdot 8! \cdot 6!$.

ב. מספר האפשרויות לסדר 6 אנשים על ספסל הוא $7!$.

נקבל $\binom{16}{9} \cdot 8! \cdot 7!$.

<u>שאלה 2</u>:

מבין דיירי בית משותף המונים 10 זוגות יש לבחור ועד בן 6 דיירים. כמה ועדים שונים ניתן להרכיב אם בועד חייבים להיות לפחות אישה אחת, לפחות גבר אחד ואסור שימצאו בני זוג.

<u>פתרון שאלה 2</u>:

מספר האפשרויות לבחור 7 זוגות מתוך 10 זוגות (ללא חזרות, בלי חשיבות לסדר) הוא $\binom{10}{7}$.

לאחר שקבענו 7 זוגות:

- מספר האפשרויות לבחור נציג אחד מתוך כל זוג הוא 2^7.
- מספר האפשרויות לועד שכולו נשים הוא 1.
- מספר האפשרויות לועד שכולו גברים הוא 1.
- לכן מספר האפשרויות לבחור ועד שלא כולו נשים ולא כולו גברים הוא $2^7 - 2$.

מעקרון הכפל מספר האפשרויות לבחירת הועד הוא

$$\binom{10}{7}(2^7 - 2)$$

<u>שאלה 3</u>:

בכמה דרכים ניתן לחלק 50 כדורים זהים לשלושה תאים כך שבתא הראשון יהיו פחות מ 10 כדורים, בשני פחות מ 20 ובשלישי פחות מ 30?

<u>פתרון שאלה 3</u>:

נסמן ב S את קבוצת החלוקות של 50 כדורים ל 3 תאים.

נסמן ב A_1 את קבוצת החלוקות של 50 כדורים ל 3 תאים כך שבתא 1 לפחות 10 כדורים.

נסמן ב A_2 את קבוצת החלוקות של 50 כדורים ל 3 תאים כך שבתא 2 לפחות 20 כדורים.

נסמן ב A_3 את קבוצת החלוקות של 50 כדורים ל 3 תאים כך שבתא 3 לפחות 30 כדורים.

קבוצת הפתרונות היא $S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ והיא זרה ל $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

מעיקרון החיבור נקבל ש

$$|S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

מעיקרון ההכלה וההפרדה נקבל ש

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

כעת

$$|S| = \binom{50+3-1}{50} = \binom{52}{50}$$

$$|A_1| = \binom{40+3-1}{40} = \binom{42}{40}, |A_2| = \binom{30+3-1}{30} = \binom{32}{30}, |A_3| = \binom{20+3-1}{20} = \binom{22}{20}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{20+3-1}{20} = \binom{22}{20}, |A_2 \cap A_3| = 1, |A_1 \cap A_3| = \binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

לכן

$$\begin{aligned}|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \binom{52}{50} - \binom{42}{40} - \binom{32}{30} - \binom{22}{20} + \binom{22}{20} + \binom{12}{10} + 1 - 0 \\ &= \frac{52!}{2!\,50!} - \frac{42!}{2!\,40!} - \frac{32!}{2!\,30!} + \frac{12!}{2!\,10!} + 1 = \frac{52 \cdot 51}{2} - \frac{42 \cdot 41}{2} - \frac{32 \cdot 31}{2} + \frac{12 \cdot 11}{2} + 1 \\ &= 1326 - 861 - 496 + 66 + 1 = 36\end{aligned}$$

<u>שאלה 4</u>:
בקרטון 50 נורות שונות, מתוכן 18 מקולקלות. אדם שלף באופן אקראי 3 נורות מהקרטון.
כמה אפשרויות שליפה שונות ישנן שבהן בידו לפחות נורה אחת תקינה?

<u>פתרון שאלה 4</u>:

הפתרון הוא מספר האפשרויות לבחור 3 נורות כלשהן מתוך 50 פחות מספר האפשרויות לבחור 3 נורות לא תקינות מתוך 18, כלומר

$$\binom{50}{3}-\binom{18}{3}$$

לחילופין ניתן לחשוב על (בחירת 3 נורות תקינות) + (בחירת 2 נורות תקינות ונורה לא תקינה) + (בחירת נורה תקינה ו 2 נורות לא תקינות), כלומר

$$\binom{32}{3}+\binom{32}{2}\binom{18}{1}+\binom{32}{1}\binom{18}{2}$$

<u>שאלה 5</u>:
כמה מספרים טבעיים בין 1 ל 500 אינם מתחלקים ב 7, אך מתחלקים ב 3 או ב 5?

<u>פתרון שאלה 5</u>:

נסמן $A=\{1,\dots,500\}$, ונגדיר את הקבוצות הבאות:

$$A_3=\{n\in A:3\mid n\},A_5=\{n\in A:5\mid n\},A_7=\{n\in A:7\mid n\}$$

קבוצת המספרים שמתחלקים ב 3 וב 7 היא $A_3\cap A_7$.
קבוצת המספרים שמתחלקים ב 5 וב 7 היא $A_5\cap A_7$.
הפתרון הוא גודל קבוצת המספרים שמתחלקים ב 3 או ב 5 פחות גודל קבוצת המספרים שמתחלקים ב 3 או ב 5 אך לא ב 7, כלומר

$$|A_3\cup A_5|-|(A_3\cap A_7)\cup(A_5\cap A_7)|$$

נשים לב ש $|A_3|=\left\lfloor\frac{500}{3}\right\rfloor=166,|A_5|=\left\lfloor\frac{500}{5}\right\rfloor=100$.
בנוסף $|A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{500}{21}\right\rfloor=23,|A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{500}{35}\right\rfloor=14,|A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{500}{15}\right\rfloor=33$,
ו $|A_3\cap A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{500}{105}\right\rfloor=4$
מעיקרון ההכלה וההפרדה נקבל ש

$$|A_3\cup A_5|=|A_3|+|A_5|-|A_3\cap A_5|=166+100-33=233$$

ובנוסף

$$|(A_3\cap A_7)\cup(A_5\cap A_7)|=|(A_3\cap A_7)|+|(A_5\cap A_7)|-|A_3\cap A_5\cap A_7|=23+14-4=33$$

וכעת

$$|A_3\cup A_5|-|(A_3\cap A_7)\cup(A_5\cap A_7)|=233-33=200$$

<u>שאלה 6</u>:

הוכח בצורה קומבינטורית ש $\frac{(2n)!}{2(n!)^2}$ מספר שלם.

<u>פתרון שאלה 6</u>:

מספר האפשרויות לחלק $2n$ אנשים ל 2 קבוצות שבכל אחת n אנשים, עם חשיבות לסדר בין הקבוצות, הוא

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

כאשר אין חשיבות לסדר בין הקבוצות, מספר האפשרויות הוא

$$\frac{(2n)!}{2(n!)^2}$$

<u>שאלה 7</u>:

כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה $x+y+z=25$, כאשר $2\le x\le 8, 3\le y\le 12, 7\le z\le 14$?

<u>פתרון שאלה 7</u>:

מספר הפתרונות הטבעיים שווה למספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x+y+z=13$, כאשר $0\le x\le 6,\ 0\le y\le 9,\ 0\le z\le 7$.

מספר הפתרונות הטבעיים למשוואה $x+y+z=13$ הוא $\binom{15}{13}=\binom{3+13-1}{13}$.

מספר הפתרונות הטבעיים למשוואה $x+y+z=13$ בהם $x\ge 7$ הוא $\binom{8}{6}=\binom{3+6-1}{6}$.

מספר הפתרונות הטבעיים למשוואה $x+y+z=13$ בהם $y\ge 10$ הוא $\binom{5}{3}=\binom{3+3-1}{3}$.

מספר הפתרונות הטבעיים למשוואה $x+y+z=13$ בהם $z\ge 8$ הוא $\binom{7}{5}=\binom{3+5-1}{5}$.

נקבל

$$\binom{15}{13}-\binom{8}{6}-\binom{5}{3}-\binom{7}{5}=\frac{15!}{2!\,13!}-\frac{8!}{2!\,6!}-\frac{5!}{2!\,3!}-\frac{7!}{2!\,5!}=\frac{15\cdot 14}{2}-\frac{8\cdot 7}{2}-\frac{5\cdot 4}{2}-\frac{7\cdot 6}{2}$$
$$=105-28-10-21=46$$

<u>שאלה 8</u>:

תהי $M = \{1,2,\dots,m\}$.

כמה אפשרויות יש לבנות 4 תתי קבוצות של M, שנסמנן A,B,C,D (יש חשיבות לשמות הקבוצות), כך שיתקיים:

א) $A\cup B\cup C\cup D\subseteq M$

ב) $A\cup B\cup C\cup D = M$

ג) כמו סעיף ב', וגם ארבע תתי הקבוצות זרות זו לזו.

ד) כמו סעיף ג', וגם $|A|$ אי זוגי.

ה) כמו סעיף ג', וגם $A\neq\emptyset, B\neq\emptyset, C\neq\emptyset, D\neq\emptyset$.

<u>פתרון שאלה 8</u>:

א) לכל אחת מהקבוצות יש 2^m אפשרויות.
לכן מעיקרון הכפל נקבל $(2^m)^4 = 2^{4m}$.

ב) כל אחד מ m האיברים חייב להופיע לפחות באחת מהקבוצות.
נקבע אבר שרירותי.
האבר יכול להיות באחת מן הקבוצות, בשתי קבוצות מתוך הארבע, בשלוש מתוך הארבע, או בכל הקבוצות, כלומר $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$.
לפי משפט מתקיים ש $\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i} = 2^4$, ולכן $\sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i} = 2^4-\binom{4}{0} = 2^4-1$
מעיקרון הכפל נקבל $(2^4-1)^m$ אפשרויות.

ג) כעת כל אבר חייב להופיע בדיוק באחת מתוך ארבע הקבוצות, לכן לכל איבר יש 4 אופציות.
מעיקרון הכפל נקבל 4^m אפשרויות.

ד) נסתכל באופן ספציפי על A.
יהי i מספר אי זוגי, אזי מספר האפשרויות עבור A הוא $\binom{m}{i}$.
כעת צריך לחלק $m-i$ איברים בין 3 קבוצות.
בצורה דומה לסעיף ג', נקבל 3^{m-i} אפשרויות.
סה"כ נקבל $\sum_{i\ \text{א"ז}}\binom{m}{i}\cdot 3^{m-i}$ אפשרויות.

ה) בסעיף ג' קיבלנו 4^m אפשרויות.
נסמן ב X_1,X_2,X_3,X_4 את קבוצת האפשרויות לתתי הקבוצות כאשר A,B,C,D ריקות (בהתאמה).
הפתרון הוא $4^m-|x_1\cup x_2\cup X_3\cup X_4|$. נשתמש בעיקרון ההכלה וההפרדה.
כאשר בדיוק קבוצה אחת היא ריקה, אנו מפזרים m אברים בין 3 קבוצות זרות בזוגות.
מספר האפשרויות לכך הוא 3^m, לכן לכל $i\in\{1,2,3,4\}$ נקבל $|X_i| = 3^m$.
כאשר בדיוק שתי קבוצות ריקות, מספר האפשרויות הוא 2^m.
כלומר לכל $i,j\in\{1,2,3,4\}$ שונים נקבל $|X_i\cap X_j| = 2^m$, ויש $\binom{4}{2}$ מקרים כאלו.
לכן נקבל $\binom{4}{2}2^m$ אפשרויות בהן בדיוק שתי קבוצות ריקות.
כאשר בדיוק שלוש קבוצות ריקות, מספר האפשרויות הוא 1^m.
כלומר לכל $i,j,k\in\{1,2,3,4\}$ שונים נקבל $|X_i\cap X_j\cap X_k| = 1^m$, ויש $\binom{4}{3}$ מקרים כאלו.
לכן נקבל $\binom{4}{3}1^m$ אפשרויות בהן בדיוק שלוש קבוצות ריקות.
המקרה שארבעת הקבוצות ריקות לא יתכן.
נקבל $4^m-\left(4\cdot 3^m-\binom{4}{2}2^m+\binom{4}{3}1^m\right) = 4^m-4\cdot 3^m+\binom{4}{2}2^m-\binom{4}{3}$.

<u>שאלה 9</u>:

בכתה יש שלוש שורות, ובכל שורה 8 כסאות. יש 20 סטודנטים בשיעור.
יש 6 סטודנטים קבועים שתמיד יושבים בשורה הראשונה.
יש 3 סטודנטים קבועים שתמיד יושבים בשורה השניה.
יש 8 סטודנטים קבועים שתמיד יושבים בשורה השלישית.
בכמה אפשרויות שונות יכולים הסטודנטים לשבת בכתה?

<u>פתרון שאלה 9</u>:

עבור 6 הסטודנטים של השורה הראשונה נבחר 6 כסאות מתוך 8 (ללא חזרות, עם חשיבות לסדר).
עבור 3 הסטודנטים של השורה השניה נבחר 3 כסאות מתוך 8 (ללא חזרות, עם חשיבות לסדר).
עבור 8 הסטודנטים של השורה השניה נבחר 8 כסאות מתוך 8 (ללא חזרות, עם חשיבות לסדר).
עבור שאר 3 הסטודנטים הנותרים נבחר 3 כסאות מתוך 7 שנותרו (ללא חזרות, עם חשיבות לסדר).
כלומר

$$\frac{8!}{(8-6)!}\cdot\frac{8!}{(8-3)!}\cdot\frac{8!}{(8-8)!}\cdot\frac{7!}{(7-3)!}$$