אינפי 1 החממה - תרגול 3

2 בנובמבר 2020

1 אריתמטיקה של גבולות

משפט: תהיינה $a_n \to a, b_n \to b$ סדרות מתכנסות. אזי:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
- אם $b \neq 0$ אז: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

תרגילים:

1. תהיינה a_n, b_n סדרות כך שקיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L$. הוכיחו או הפריכו: הגבולות $\lim a_n, \lim b_n$ קיימים.
   פתרון: הראינו דוג' שיעור שעבר.

2. תהיינה a_n, b_n סדרות כך שקיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L$, ונתון בנוסף שהגבול $\lim a_n$ לא קיים. הוכיחו או הפריכו: הגבול $\lim b_n$ לא קיים.
   פתרון: הוכחה: נניח בשלילה שקיים הגבול ונסמנו b. כלומר, $\lim b_n = b$. לכן:

   $$\lim a_n = \lim\left((a_n + b_n) - b_n\right) = \lim(a_n + b_n) - \lim b_n = L - b \in \mathbb{R}$$

   קיבלנו שקיים הגבול של a_n בסתירה לנתון.

3. אם $a_n \to 0$, והגבול b_n לא קיים. מה ניתן לומר על $\lim a_n b_n$?
   פתרון: הכל יכול להיות:

   (א) הגבול הוא אפס: $a_n = \frac{1}{n}, b_n = (-1)^n$ ואז:

   $$\lim a_n b_n = \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

(ב) הגבול הוא מספר $a\neq 0$: $a_n=\frac{(-1)^n}{n}, b_n=(-1)^n an$ ונקבל:

$$\lim a_nb_n=\lim\frac{(-1)^{2n}an}{n}=a$$

(ג) הגבול של המכפלה לא קיים: $a_n=\frac{1}{n}, b_n=(-1)^n n$ ואז המכפלה:

$$a_nb_n=(-1)^n$$

4. מצאו את גבול הסדרה $a_n=\frac{3n^7+5n^2+1}{6n^7+n^4}$.
פתרון, נשתמש בכללי האריתמטיקה:

$$\lim\frac{3n^7+5n^2+1}{6n^7+n^4}=\lim\frac{\frac{3n^7+5n^2+1}{n^7}}{\frac{6n^7+n^4}{n^7}}=\frac{\lim\frac{3n^7+5n^2+1}{n^7}}{\lim\frac{6n^7+n^4}{n^7}}=\frac{\lim 3+\lim\frac{5}{n^5}+\lim\frac{1}{n^7}}{\lim 6+\lim\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{2}$$

5. הוכיחו שאם $\frac{a_n}{b_n}\to 1$, $a_n\to a\neq 0$ אז $b_n\to a$.
פתרון: נשתמש באריתמטיקה:

$$\lim b_n=\lim a_n\cdot\frac{b_n}{a_n}=\lim a_n\cdot\frac{\lim 1}{\lim\frac{a_n}{b_n}}=a\cdot 1=a$$

2 סדרות מונוטוניות

משפט:

- סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.
- באופן שקול, סדרה מונוטונית עולה (יורדת) וחסומה מלעיל (מלרע) מתכנסת.
- גבול סדרה מונוטונית עולה יהיה sup, גבול מונוטונית יורדת יהיה inf.

תרגילים:

1. הוכיחו שהסדרה $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}=\sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{k}$ מתכנסת.
פתרון: נראה שהיא מונוטונית יורדת:

$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=n+1}^{3(n+1)}\frac{1}{k}-\sum_{k=n}^{3n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}-\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} < -\frac{1}{n} + 3 \cdot \frac{1}{3n} = 0$$

ההפרש בין שני איברים עוקבים בסדרה הוא שלילי, ולכן היא מונו' יורדת.

זו סדרה שבה כל האיברים חיוביים, ולכן חסומה מלרע ע"י 0. בסה"כ היא מתכנסת.

2. יהיו $0 < \beta < \alpha$, ונגדיר:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha & \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_1 = \beta & \forall n \in \mathbb{N} : b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

הוכיחו ששתי הסדרות מתכנסות.

פתרון: נתחיל בלהראות $\forall n : a_n \geq b_n$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0$$

עכשיו נראה מונו':

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n \geq \sqrt{b_n^2} - b_n = 0$$

בעצם הראינו:

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b \leq a \leq \cdots \leq a_1$$

הסבר לחסימות: a_n חסומה מלרע ע"י β: נניח בשלילה שיש n כך ש־ $a_n < \beta =$ $b_1 \leq b_n$ וקיבלנו $a_n < b_n$ בסתירה. בדומה b_n חסומה מלעיל ב־α. האם ניתן לדעת מה הגבול? השיטה משאלה 3 עוזרת רק להראות שהגבולות שווים:

$$a = \lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$b = \lim b_n = \lim b_{n+1} = \lim \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{ab}$$

$$a = \frac{a + \sqrt{ab}}{2} \Rightarrow a = b$$

3. יהי $0 < c < 1$, ונגדיר:

$$\begin{cases} a_1 = c \\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} \end{cases}$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון: נבדוק מונו':

$$a_{n+1} - a_n = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} - a_n = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} - \left(\frac{c}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}\right) = \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{2} = \frac{(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})}{2}$$

רואים שכדאי להוכיח באינדוקציה. כי לו ידענו על שליליות/חיוביות ההפרש $a_n - a_{n-1}$ נדע על שליליות/חיוביות $a_{n+1} - a_n$.

בסיס: עבור $n = 1$ מתקיים: $a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} - c = -\frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < 0$. לכן נוכיח באינדוקציה שהיא מונו' יורדת, והנה הבסיס.

צעד: נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} - a_n = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} - \left(\frac{c}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}\right) = \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{2} = \frac{(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})}{2}$$

כעת, כיון ש־ $a_n + a_{n-1} > 0$ ומהנחת האינדוקציה $a_n - a_{n-1} < 0$ נקבל:

$$a_{n+1} - a_n < 0$$

מש"ל. זו סדרה חיובית ולכן חסומה מלרע ע"י 0.

נמצא את הגבול: נסמן את הגבול ב־ L. נשים לב שמתקיים:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}\right) = \frac{c}{2} + \frac{L^2}{2}$$

קיבלנו משוואה ריבועית על L:

$$L^2 - 2L + c = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - c}$$

כיון ש־ $1 + \sqrt{1-c} > 1 > c = a_1$ הוא לא יכול להיות הגבול של הסדרה כי היא יורדת. לכן $L = 1 - \sqrt{1-c}$.

4. יהי $x > 1$ נגדיר:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{x} \\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \sqrt{x + a_n} \end{cases}$$

הוכיחו שהסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

פתרון:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{x + a_n} - a_n = \sqrt{x + a_n} - \sqrt{x + a_{n-1}}$$

אז כנראה שכדאי אינדוקציה. בסיס קל לראות. ואם $a_n > a_{n-1}$ אז :

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{x + a_n} - a_n = \sqrt{x + a_n} - \sqrt{x + a_{n-1}} > \sqrt{x + a_{n-1}} - \sqrt{x + a_{n-1}} = 0$$

הראינו מונו' באינדוקציה. חסומה מלעיל ע"י $2x$ ולכן מתכנסת (תרגיל: אינדוקציה).

בסיס: עבור $a_1 = \sqrt{x} < 2x$.

נניח נכונות ל־n ונוכיח עבור $n + 1$:

$$a_{n+1} = \sqrt{x + a_n} < \sqrt{x + 2x} = \sqrt{3x} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} < 2x$$

נסמן $L = \lim a_n$ ונקבל:

$$L = \lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{x + a_n} = \sqrt{x + L}$$

$$L^2 - L - x = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

הסדרה חיובית ולכן $0 > L = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{2}$ לא יכול להיות ולכן נקבל $L = \frac{1 + \sqrt{1+4x}}{2}$