שאלות פתוחות על חסמים

שאלות פתוחות:

1. תהינה A, B קבוצות חסומות (לא ריקות) שכל איבריהן חיוביים. נגדיר

$$A \cdot B = \{ab \mid a \in A, \quad b \in B\}$$

כלומר $A \cdot B$ היא הקבוצה של כל המכפלות של איבר מ A עם איבר מ B. הוכיחו כי $\sup(A \cdot B)$ קיים ומתקיים

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$$

פתרון: ראשית, ברור כי לכל $a \in A$ ו $b \in B$ מתקיים ש

$$a \leq \sup A, \quad b \leq \sup B$$

ובגלל שכל המספרים חיוביים מתקיים גם

$$ab \leq \sup A \cdot \sup B$$

כלומר $\sup A \cdot \sup B$ חסם מלעיל ל $A \cdot B$. לכן, לפי אקסיומת החסם העליון $\sup(A \cdot B)$ קיים ובגלל שהוא החסם מלעיל הכי קטן.

$$\sup(A \cdot B) \leq \sup(A) \cdot \sup(B)$$

כדי להוכיח את אי השוויון השני, נשים לב שלכל $a \in A$ ולכל $b \in B$

$$ab \leq \sup(A \cdot B)$$

ולכן

$$a \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{b}$$

(מותר לחלק ככה כי b חיובי). לכן

$$\frac{\sup(A \cdot B)}{b}$$

הוא חסם מלעיל של A (לכל $b \in B$) ולכן

$$\sup(A) \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{b}$$

מכאן נקבל

$$b \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{\sup(A)}$$

כלומר $\frac{\sup(A\cdot B)}{\sup(A)}$ חסם מלעיל של B ולכן

$$\sup(B) \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{\sup(A)}$$

ומכאן

$$\sup(A) \cdot \sup(B) \leq \sup(A \cdot B)$$

אז בסך הכל

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$$

כנדרש.