תרגיל 14 – מתמטיקה לכימאים ג'

התרגיל אינו להגשה

1. ענו על הסעיפים הבאים:

1.1. מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

פתרון: $f(x)=x$ היא פונקציה אי זוגית לכן $a_n=0$ לכל $n\ge 0$. בנוסף,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(nx)dx=\begin{bmatrix} u=x & du=1dx \\ dv=\sin(nx) & v=-\dfrac{\cos(nx)}{n}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n}+\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right)=$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}+0-0\right)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

לכן טור פורייה המבוקש הוא:

$$\hat{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

1.2. לאיזה ערך מספרי הטור מתכנס עבור ערכי x הבאים?

1.2.1. $x=0$.

פתרון: $f(x)$ רציפה ב $x=0$ לכן, $\hat{f}(0)=f(0)=0$.

1.2.2. $x=\pi$

פתרון: מכיוון שמדובר על טור פורייה, לפונקציה $f(x)$ אנחנו מתייחסים כאל פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π. כעת:

$$\hat{f}(\pi)=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}\underset{period\_2\pi}{=}\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$$

1.2.3. $x=6.7\pi$

פתרון: טור פורייה הוא מחזורי 2π לכן,

$$\hat{f}(6.7\pi)=\hat{f}(6.7\pi-6\pi)=\hat{f}(0.7\pi)\underset{continuity}{=}f(0.7\pi)=0.7\pi$$

1.2.4. $x=-101.2\pi$.

פתרון: טור פורייה הוא מחזורי 2π לכן,

1.2.5. $\hat{f}(-101.2\pi)=\hat{f}(-101.2\pi+102\pi)=\hat{f}(0.8\pi)\underset{continuity}{=}f(0.8\pi)=0.8\pi$

2. ענו על הסעיפים הבאים:

2.1 מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x\le 0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$.

פתרון:

טור פורייה של הפונקציה הוא מהצורה:

$$\hat{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

כאשר:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}1dx\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(0+[x]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(\pi)=1$$

ולכל $n\ge 1$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(nx)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\cos(nx)dx+\int_{0}^{\pi}1\cos(nx)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0+\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(0)=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(nx)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\sin(nx)dx+\int_{0}^{\pi}1\sin(nx)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0+\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

לכן, טור פורייה המבוקש הוא:

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin(nx)$$

נשים לב, לכל ערך n זוגי האיבר הכללי בטור שבביטוי הנ"ל יתאפס, לכן מספיק לסכום מעל האיברים האי זוגיים. עבור כל n אי זוגי, ערך הביטוי $(1-(-1)^n)$ הוא 2.
לכן, (ע"י הצבת, $n=2k-1$ עבור $k\ge 1$, מה שיבטיח ריצה על כל האיברים האי זוגיים), נקבל

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2k-1}\right)\sin((2k-1)x)\ .$$

2.2 השתמשו בשוויון פרסבל לחישוב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

פתרון: שוויון פרסבל מדף הנוסחאות הוא

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{a_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)$$

אצלינו, $L = \pi$.

לכן

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2n-1}\right)\right)^2$$

(שימו לב כי העובדה שסכמנו בטור רק את המקדמים b_n עבור n אי זוגי אינה בעייתית כי כל שאר המקדמים הם אפס).

לכן:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2n-1}\right)\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f^2(x)dx + \int_{0}^{\pi} f^2(x)dx\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0^2\,dx + \int_{0}^{\pi} 1^2\,dx\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} 1dx\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}(\pi) - \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

3. תהי $f(x) = 1$ המוגדרת בקטע $(0,\pi]$. ענו על הסעיפים הבאים:

3.1 מצאו את ההרחבה האי זוגית של $f(x)$ לקטע $(-\pi,\pi]$.

פתרון:

ההרחבה האי זוגית היא:

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \le \pi \\ 0 & x = 0 \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

3.2 מצאו את טור פורייה של ההרחבה האי זוגית.

פתרון: מכיוון שמדובר בטור פורייה של הרחבה אי זוגית $a_n = 0$ לכל $n \ge 0$.

בנוסף, לכל $n \ge 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\sin(nx)dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\right) =$$
$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

לכן, טור פורייה המבוקש הוא:

$$\widehat{f}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin(nx)$$

נשים לב, לכל ערך n זוגי האיבר הכללי בטור שבביטוי הנ"ל יתאפס, לכן מספיק לסכום מעל האיברים האי זוגיים. עבור כל n אי זוגי, ערך הביטוי $(1-(-1)^n)$ הוא 2.
לכן, (ע"י הצבת, $n = 2k-1$ עבור $k \geq 1$, מה שיבטיח ריצה על כל האיברים האי זוגיים), נקבל

$$\widehat{f}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{2k-1}\right)\sin((2k-1)x)$$
$$\widehat{f}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$$

3.3. השתמשו בשוויון פרסבל לחישוב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

פתרון: שוויון פרסבל מדף הנוסחאות הוא

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\,2}+b_n^{\,2}\right)$$

אצלינו, $L=\pi$. והפונקציה עבורה חישבנו טור פורייה היא f_2
לכן

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2^{\,2}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n-1)}\right)^2$$

(שימו לב כי העובדה שסכמנו בטור רק את המקדמים b_n עבור n אי זוגי אינה בעייתית כי כל שאר המקדמים הם אפס).

לכן:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2^{\,2}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n-1)}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f_2^{\,2}(x)dx + \int_{0}^{\pi} f_2^{\,2}(x)dx\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)^2 dx + \int_{0}^{\pi}1^2 dx\right) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1dx + \int_{0}^{\pi}1dx\right) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}(\pi+\pi) = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

שימו לב, כי קיבלנו את אותה תוצאה כמו בסעיף 2.2.

4. מצאו את טור פורייה של ההרחבה הזוגית של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le h \\ 0, & h < x < \pi \end{cases}$$

כאשר $0 < h < \pi$ הוא קבוע ממשי כלשהו.

פתרון:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{h}1dx + \int_h^{\pi}0dx\right] = \frac{2h}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{h}\cos nxdx + \int_h^{\pi}0\cos nxdx\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nxdx = \frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{h} = \frac{2\sin nh}{\pi n}$$

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nh}{\pi n}\cos nx = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx$$

5. פתרו את משוואות הגלים

$$\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{1}{\pi^2}u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x^2 + 1 & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

פתרון:

לפי הנוסחה המתאימה, הפתרון הוא מהצורה

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{L}\left[b_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)+b_n^*\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right]$$

כאשר:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

אצלינו, $L=1$, $c=\frac{1}{\pi}$, $f(x)=x^2+1$ ו $g(x)=0$.

לכן, הפתרון הוא:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi nx}{1}\right)\left[b_n\cos\left(\frac{\frac{1}{\pi}n\pi}{1}t\right)+b_n^*\sin\left(\frac{\frac{1}{\pi}n\pi}{1}t\right)\right]$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi nx)\left[b_n\cos(nt)+b_n^*\sin(nt)\right]$$

כאשר:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{2}{1}\int_0^1(x^2+1)\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx=2\int_0^1(x^2+1)\sin(n\pi x)dx=$$

$$\begin{bmatrix} u=x^2+1 & du=2xdx \\ dv=\sin(n\pi x) & v=-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\end{bmatrix}=2\left(\left[-(x^2+1)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1+\int_0^1 2x\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx\right)=$$

$$2\left(-2\frac{(-1)^n}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx\right)=\begin{bmatrix} u=x & du=1dx \\ dv=\cos(n\pi x) & v=\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\end{bmatrix}=$$

$$2\left(\frac{2(-1)^{n+1}+1}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\left(\left[x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1-\int_0^1\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx\right)\right)=2\left(\frac{2(-1)^{n+1}+1}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\left(0-0+\left[\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_0^1\right)\right)$$

$$=2\left(\frac{2(-1)^{n+1}+1}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\left(\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}-\frac{1}{(n\pi)^2}\right)\right)=2\left(\frac{2(-1)^{n+1}+1}{n\pi}+\frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^3}\right)$$

$$b_n^*=\frac{2}{\frac{1}{\pi}n\pi}\int_0^1 0\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx=0$$

לכן הפתרון:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi nx)\left[2\left(\frac{2(-1)^{n+1}+1}{n\pi}+\frac{(-1)^n-1}{(n\pi)^2}\right)\cos(nt)+0\sin(nt)\right]$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin(\pi nx)\left(\frac{2(-1)^{n+1}+1}{n\pi}+\frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^3}\right)\cos(nt)$$

.6 פתרו את משוואות הגלים

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=x+1 & 0<x<1 \\ u_t(x,0)=2 & 0<x<1 \end{cases}$$

פתרון:

לפי הנוסחה המתאימה, הפתרון הוא מהצורה

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{L}\left[b_n\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)+b_n^*\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right]$$

כאשר:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

אצלינו, $L=1$, $c=1$, $f(x)=x+1$ ו $g(x)=2$.

לכן, הפתרון הוא:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi nx}{1}\right)\left[b_n\cos\left(\frac{1n\pi}{1}t\right)+b_n^*\sin\left(\frac{1n\pi}{1}t\right)\right]$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi nx)\left[b_n\cos(n\pi t)+b_n^*\sin(n\pi t)\right]$$

כאשר:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{1}\int_0^1 (x+1)\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx = 2\int_0^1 (x+1)\sin(n\pi x)dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x+1 & du = 1dx \\ dv = \sin(n\pi x) & v = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \end{bmatrix} = 2\left(\left[-(x+1)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx\right) =$$

$$2\left(-2\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} + \left[\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_0^1\right) = 2\left(\frac{2(-1)^{n+1}+1}{n\pi}\right) = \frac{4(-1)^{n+1}+2}{n\pi}$$

$$b_n^* = \frac{2}{1n\pi}\int_0^1 2\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx = \frac{4}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = -\frac{4}{(n\pi)^2}[\cos(n\pi x)]_0^1 = -\frac{4}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1) =$$
$$\frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}$$

לכן הפתרון:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi nx)\left[\frac{4(-1)^{n+1}+2}{n\pi}\cos(n\pi t) + \frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t)\right] =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi nx)\frac{4(-1)^{n+1}+2}{n\pi}\cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi nx)\frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t)$$

נשים לב, עבור הטור השני, לכל ערך n זוגי האיבר הכללי יתאפס, לכן מספיק לסכום מעל האיברים האי זוגיים. עבור כל n אי זוגי, ערך הביטוי $(1-(-1)^n)$ הוא 2.

לכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi nx)\frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}\sin(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi(2n-1)x)\frac{8}{((2n-1)\pi)^2}\sin((2n-1)\pi t)$$

ובסה"כ:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi nx)\frac{4(-1)^{n+1}+2}{n\pi}\cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi(2n-1)x)\frac{8}{((2n-1)\pi)^2}\sin((2n-1)\pi t)$$

7. פתרו את משוואת החום

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

פתרון: נשתמש בנוסחה המתאימה:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

כאשר:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

אצלינו: $L=\pi$ $c=1$ ו $f(x)=x$ לכן, $\lambda_n = \frac{1n\pi}{\pi} = n$ והפתרון הוא

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

עבור,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = \begin{bmatrix} u=x & du=1dx \\ dv=\sin(nx) & v=-\dfrac{\cos(nx)}{n}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} + 0 - 0\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

לכן, הפתרון הוא:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

8. פתרו את משוואת החום

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=5 & 0<x<1 \end{cases}$$

פתרון: נשתמש בנוסחה המתאימה:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

כאשר:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

אצלינו: $L=1$ $c=\sqrt{2}$ ו $f(x)=\cos(\pi nx)$ לכן, $\lambda_n = \frac{\sqrt{2}n\pi}{1} = \sqrt{2}n\pi$ והפתרון הוא

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\sqrt{2}n\pi)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{1}x\right)$$
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

עבור,

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 5\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx=10\int_0^1 \sin(n\pi x)dx==-10\left[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1=-10\left[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\right]=10\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]$$

לכן, הפתרון הוא:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} 10\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)e^{-2n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

נשים לב, לכל ערך n זוגי האיבר הכללי יתאפס, לכן מספיק לסכום מעל האיברים האי זוגיים. עבור כל n אי זוגי, ערך הביטוי $(1-(-1)^n)$ הוא 2.
לכן, (ע"י הצבת, $n=2k-1$ עבור $k\geq 1$, מה שיבטיח ריצה על כל האיברים האי זוגיים), נקבל

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\frac{2}{(2k-1)\pi}\right)e^{-2(2k-1)^2\pi^2 t}\sin((2k-1)\pi x)$$

בהצלחה! ☺