מבוא לטופולוגיה

תוכן תרגיל כיתה 4

תזכורת 1

לוגיקת הגדרה מרחבים מטריים וטופולוגיים

מרחב מטרי

↓

כדור פתוח

↓

קבוצה פתוחה

↓

תכונות קבוצות פתוחות → אקסיומות טופולוגיה

↓

הגדרת מרחב טופולוגי

כל טענה לגבי מרחבים טופולוגיים מתקיימת גם למרחבים מטריים.
למשל, משפט שפונקציה (העתקה) רציפה אם"א היא רציפה בכל נקודה.
כמובן זה עובד רק במקרה כאשר עובדה מסויימת אפשר לבטא בספת קבוצות פתוחות , בלי להזכחר מוסג "מרחק".
(דוגמה נגדית טובה כשזה בלתי אפשרי - כל הטענות הנוגעת למוסג "רציפות במידה שווה".)

תזכורת 2

(ידוע מקורסים קודמים)

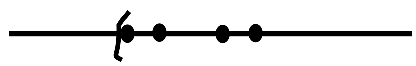
תהי $\mathbb{R} \supseteq A$ תת קבוצה ב-$\mathbb{R}$.

אינפימום הוא החסם מלרע הגדול ביותר של קבוצה A . סימון $\inf A$

$$a_* = \inf A$$

א) $a_* \in \mathbb{R}$ חסם מלרע של A , כלומר: לכל $a \in A$ מתקיים $a_* \le a$

ב) אם $b \in \mathbb{R}$ גם חסם מלרע של A , אז לכל $b \in \mathbb{R}$ מתקיים $b \le a_*$

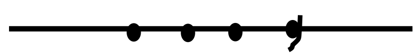


סופרמום הוא החסם מלעיל הקטן ביותר של קבוצה A . סימון $\sup A$

$$a^* = \sup A$$

א) $a^* \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A , כלומר: לכל $a \in A$ מתקיים $a^* \ge a$

ב) אם $b \in \mathbb{R}$ גם חסם מלעיל של A , אז לכל $b \in \mathbb{R}$ מתקיים $b \ge a^*$



משפט.

לכל תת קבוצה לא ריקה ב-$\mathbb{R}$ וחסומה מלרע קיים חסם מלרע הגדול ביותר.

לכל תת קבוצה לא ריקה ב-$\mathbb{R}$ וחסומה מלעיל קיים חסם מלעיל הקטן ביותר.

<u>בעיה 1</u>

תהי X קבוצה ו-T אוסף תת קבוצות בה. <u>הוכיחו</u> ש- (X,T) מרחב טופולוגי לא מטריזבילי אם:

א' $X=\{a,b,c\}$ ו- $T=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$

ב' $X=[0,\infty)\subseteq\mathbb{R}$ ו- $T=\{\emptyset,X,(a,\infty)|a\in\mathbb{R},a\geq 0\}$

<u>פתרון</u>. בשני המקרים צריך קודם כל לבדוק שאוסף T הוא טופולוגיה, ז"א, מקיים שלושת האקסיומות של קבוצות פתוחות, ולאחר מכן להוכיח לא-מטריזביליות.

א'

(1) $\emptyset,X\in T$ לפי הגדרת T.

(2) יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף תת קבוצות מ-T .

- אם בין הקבוצות U_α ישנה קבוצה X אזי $\cup_{\alpha\in I}U_\alpha=X$ ואקסיומת אחוד מתקיימת.
- אם בין הקבוצות U_α ישנן קבוצות $\{a,b\}$ ו- $\{b,c\}$ אזי $X=\{b,c\}\cup\{a,b\}$ ו- $T\ni\cup_{\alpha\in I}U_\alpha=X$.
- *אם יש שם רק קבוצה אחת מ- $\{a,b\}$ ו- $\{b,c\}$ ואין X, אז האחוד שווה $\{a,b\}$ או- $\{b,c\}$ בהתאם וגם שייך ל-T .*
- *אם תת קבוצה הכי גדולה ב- $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ היא $\{b\}$, אז גם האחוד שווה $T\ni\{b\}$.*
- *לבסוף, אם כל תת הקבוצות ריקות אז גם אחודן ריק ושייך ל-T .*

(3) *נתבונן באוסף $U_1,\dots,U_n\in T$ ונסמן ב-m מספר איברים המינימלי בתת קבוצות האלה.*

- *אם $m=3$ אז $U_1=U_2=,\dots,=U_n=X$ ו-$\cap_{\alpha\in I}U_\alpha=X$.*
- *אם $m=2$ אז או שתיהן מהקבוצות $\{a,b\}$ ו- $\{b,c\}$ מופיעות ב-$U_1,\dots,U_n$ ואז החיתוך שווה $T\ni\{b\}$, או רק אחת מהן ישנה שם ואז החיתוך שווה לה ושייך ל-T .*
- *אם $m=1$ אז $\{b\}$ "המינימלית" בין $U_1,\dots,U_n$ ואז החיתוך שווה $T\ni\{b\}$.*

- *אם $m=0$ אזי מופיע ב-$U_1,\dots,U_n$ קבוצה ריקה וגם החיתוך ריק ושייך ל-T .*

<u>לגבי מטריזביליות</u>

בהרצאה הוכח שמרחב מטרי כל נקודון הוא קבוצה סגורה. אם נתבונן פה ב-$\{b\}$, *אז $\{b\}^c=\{a,c\}\notin T$, ז"א, $\{b\}^c$ אינה פתוחה ולכן $\{b\}$ אינה סגורה. אזי T לא מושרה על ידי שום מטריקה*

ו-(X,T) אינו תטריזבילי.

ב'

(1) $\emptyset,X\in T$ לפי הגדרת T.

(2) יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף תת קבוצות *מ-T .*

יכוים להיות שני מקרי קצה:

- ישנה באסף קבוצה X *, אז האחוד של כל האוסף שווה $X\in T$.*
- *כל איברי האוסף ריקות. אז גם האחוד ריק ושייך ל-T .*

בשאר *המקרים לכל $\alpha\in I$: $U_\alpha=(a_\alpha,\infty)$ כאשר $a_\alpha\geq 0$*

נסמן: $a=\inf\{a_\alpha|\alpha\in I\}$ (קיים לפי משפט ויירשטרס מהקורסים הקודמים).

נוחכיח ש-$\cup_{\alpha\in I}(a_\alpha,\infty)=(a,\infty)$:

<u>$\subseteq$.</u>

אם $x\in(a,\infty)$ *אז $x>a$ ולכן x אינו חסם מילרע* של $\{a_\alpha|\alpha\in I\}$*. אזי קיים $\beta\in I$ כך ש- $a_\beta<x$.*

אז $x\in(a_\beta,\infty)$ ולכן $x\in\cup_{\alpha\in I}(a_\alpha,\infty)$.

<u>$\supseteq$.</u>

אם $x\in\cup_{\alpha\in I}(a_\alpha,\infty)$*, אזי קיים $\beta\in I$ כך ש-$x\in(a_\beta,\infty)$* ולכן $a\leq a_\beta<x$. אז $x\in(a,\infty)$.

(3) גם כאן יכולים להיות שני מקרי קצה:

- *כל איברי האוסף* הסופי *שווים ל- X , אז החיתוך שווה ל- X.*
- *ישנה באוסף קבוצה ריקה. אז גם החיתוך ריק ושייך ל-T .*

בשאר המקרים החיתוך שווה לחיתוך של $U_i=(a_i,\infty)$ *כאשר* $a_1,\dots,a_n\geq 0$ *. נסמן: $a=\max\{a_i|1\leq i\leq n\}$.*

אזי $(a_i,\infty)\ \cap_{i=1}^{n}= (a,\infty) \ni T$.

<u>לגבי מטריזביליות</u>

בהרצאה הוכח שמרחב מטרי כל נקודון הוא קבוצה סגורה. אם נתבונן ב-$\{b\}$, כאשר $b > 0$. אז $\{b\}^c = [0,b) \cup (b,\infty) \notin T$, ז"א, $\{b\}^c$ אינה פתוחה ולכן $\{b\}$ אינה סגורה. אזי T לא מושרה על ידי שום מטריקה ו-(X,T) *אינו תטריזבילי.*

==

<u>בעיה 2 (דוגמה של מ"מ שבו משפט הינה בורך אינו תקף)</u>

<u>הגדרה</u> תהי l_∞ קבצת סדרות חסומות x_n עם איברים ממשיים

ותהי d פונקציה $d: l_\infty \times l_\infty \to [0,\infty)$

כך ש- $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ לכל שתי סדרות.

א) <u>הוכיחו</u>: (l_∞, d) מרחב מטרי

<u>הוכחה</u>

- $\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| = 0$ אם"ם $x_n = y_n$ לכל n.
- $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n - x_n| = d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$
- $|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ לכל i

$$\Downarrow$$

$|x_i - z_i| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n - z_n|$ לכל i

$$\Downarrow$$

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i - z_i| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n - z_n|$$

הוכח ש- l_∞ מרחב מטרי

תהי $\boldsymbol{o} = (0,0,\dots)$ אז נביט בקבוצה: $S = \{\boldsymbol{x} \in l_\infty | d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{o}) = 1\}$.

ב) <u>הוכיחו</u>: S קבוצה חסומה

<u>הוכחה:</u> $S \subseteq B(o,2)$

ג) <u>הוכיחו</u>: S קבוצה סגורה

<u>טענת עזר</u>. פונקציה $f: l_\infty \to \mathbb{R}$ המוגדרת לכל $x \in l_\infty$ על ידי

נוסחה $f(x)=d(x,o)$ רציפה. זה היה בתרגילי בית אבל:
<u>הוכחת</u> <u>טענת עזר.</u> תהי $x^{(n)} \to x \in l_\infty$ כאשר $x^{(n)}$ סדרה ב-l_∞.
אזי:

$$d\left(x^{(n)},x\right)\to 0$$
$$\Downarrow$$
$$\left|d\left(x^{(n)},o\right)-d(x,o)\right|\le d\left(x^{(n)},x\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left|f\left(x^{(n)}\right)-f(x)\right|=\left|d\left(x^{(n)},o\right)-d(x,o)\right|\to 0$$
$$\Downarrow$$
$$f\left(x^{(n)}\right)\to f(x)$$

אזי f רציפה, מש"ל.

לפי הגדרה $S=f^{-1}(\{1\})$. אבל הנקודון $\{1\}$ הוא קבוצה סגורה ב-l_∞ (ההרצאה). ולכן S סגורה (ההרצאה) , מש"ל.

ד) S קבוצה לא קומפקטית.
<u>הוכחה:</u>
יהי $\boldsymbol{e^n}=(0,0,..,1,0,\dots)$, כאשר "1" במיקום מספר "$n$". למשל,

$$\boldsymbol{e^1}=(1,0,\dots)$$
$$\boldsymbol{e^2}=(\boldsymbol{0},1,0,\dots)$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots.$$

נביט בסדרה $\boldsymbol{e^n}$. אזי $i\neq j \Rightarrow d\left(e^i,e^j\right)=1$. וכך גם לכל תת סדרה של $\boldsymbol{e^n}$.
אז שום תת סדרה אינה סדרת קושי ולכן שום תת סדרה לא מתכנסת. אזי l_∞ אינו קומפקטית.