הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. ניתן להגדיר על X יחס שקילות, שזה בעצם להגיד מתי שני איברים הם "שקולים", מסמנים $x \sim y$. וידוע שאם $x \sim y$ אז $y \sim x$, כל איבר שקול לעצמו, ואם $x \sim y, y \sim z$ אז $x \sim z$.

ברגע שיש יחס שקילות, יש "קבוצת מנה", מסמנים ב-$X/\sim$. שזאת קבוצה חדשה שהאיברים שלה הם "מחלקות השקילות": לכל $x \in X$, מחלקת השקילות של x היא

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}$$

למשל: נגדיר על $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ יחס שקילות: $x \sim y$ אמ"ם $xy > 0$.

יש 2 מחלקות שקילות: אחת זה הקבוצה של כל המספרים החיוביים, ואחת זה הקבוצה של כל המספרים השליליים.

קבוצת המנה במקרה זה היא קבוצה בעלת 2 נקודות.

הגדרה: אם X הוא מרחב טופולוגי, ובנוסף יש עליו יחס שקילות, אז אנחנו מקבלים את קבוצת המנה $X/\sim$, ואנחנו רוצים להגדיר עליה טופולוגיה.

יש פונקציה טבעית מX ל-$X/\sim$: $\pi : x \to [x]$, כל איבר הולך למחלקת השקילות שלו.

אנחנו רוצים שהפונקציה תהיה רציפה. אבל את זה אפשר לעשות באופן "טיפשי" ע"י זה שניקח את הטופולוגיה הטריוויאלית. אז אנחנו נדרוש שזאת תהיה הטופולוגיה המקסימלית עבורה הפונקציה רציפה. כלומר, להוסיף את כל הקבוצות שאפשר.

מה נעשה? נקח את כל הקבוצות שהתמונה ההפוכה שלהן פתוחה. וזאת תהיה הטופולוגיה שלנו.

כומר, קבוצה O ב-$X/\sim$ היא פתוחה אמ"ם $\pi^{-1}(O)$ פתוחה בX.

למשל, בדוגמא הקודמת עם $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, עם יחס השקילות שהחיוביים במחלקה אחת והשליליים במחלקה שניה. אז מרחב המנה בתור קבוצה זאת קבוצה עם שני איברים, נסמן $X/\sim = \{[1], [-1]\}$ והקבוצות הפתוחות הן:

$\{[1]\}, \{[-1]\}$- קיבלנו את הטופולוגיה הדיסקרטית. הסבר: $\pi^{-1}[1] = (0, \infty)$ שהוא פתוח, ו$\pi^{-1}[-1] = (-\infty, 0)$ שהוא פתוח.

דוגמא נוספת: נגדיר על $\mathbb{R}$ יחס שקילות שכל החיוביים ו0 שקולים. וכל השליליים שקולים. אז יש 2 מחלקות שקילות $[0], [-1]$. כעת $\pi[-1] = (-\infty, 0)$ שהיא קבוצה פתוחה, ולכן $\{[-1]\}$ הוא פתוח. ו$\pi^{-1}[0] = [0, \infty)$ שזאת לא קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$. ולכן $\{[0]\}$ אינו פתוח.

קיבלנו את מרחב שרפינסקי.

דוגמא אחרונה: נקח את $\mathbb{R}$ ונגדיר עליו את יחס השקילות הבא: $x \sim y \iff |x| = |y|$.

קבוצת המנה היא $[0, \infty)$.

מי הקבוצות הפתוחות?

O פתוחה אמ"ם $\pi^{-1}(O)$ פתוחה ב$\mathbb{R}$. $\pi^{-1}(O) = O \cup (-O)$. (התמונה ההפוכה היא לקחת את כל האיברים שבקבוצה ולהוסיף להם גם את הנגדי).

אנחנו טוענים שהקבוצות הפתוחות הן בדיוק הקבוצות שפתוחות ב$[0, \infty)$ עם טופולוגיית תת המרחב.

נבדוק מי הקטעים הפתוחים.

אז $(a, b) \subseteq [0, \infty)$, התמונה ההפוכה שלו היא $(a, b) \cup (-b, -a)$ שזאת קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$.

לכן כל הקטעים הפתוחים הם פתוחים בטופולוגיית המנה.

מי התמונה ההפוכה של $[0, b)$? תשובה: $(-b, b)$, שזאת קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$. לכן גם קטעים מהצורה $[0, b)$ יהיו פתוחים בטופולוגיית המנה על $[0, \infty)$.

לכן טופולוגיית המנה מכילה את כל הקבוצות שפתוחות ב$[0, \infty)$ כתת מרחב של $\mathbb{R}$.

כעת, תהי O פתוחה בטופולוגיית המנה. יהי $x \in O$. O פתוחה בטופולוגיית המנה לכן $\pi^{-1}(O)$ פתוחה ב$\mathbb{R}$. כלומר, הקבוצה $O \cup (-O)$ פתוחה ב$\mathbb{R}$. $x \in O$. לכן יש קטע פתוח

ב$\mathbb{R}$ $(-O) \cup O \subseteq (a,b) \ni x$. אם הקטע מוכל ב$O$- סיימנו. אחרת, הקטע $[0,b) \subseteq O$. בכל מקרה, קיבלנו שכל קבוצה שפתוחה בטופולוגיית המנה היא איחוד של קטעים פתוחים וקטעים מהצורה $[0,b)$ שזה בדיוק הבסיס של טופולוגיית תת המרחב.

אפשר להכליל את זה באופן הבא:

נניח שיש לנו מרחב טופולוגי X וקבוצה Y ופונקציה על $f : X \to Y$. אנחנו רוצים להגדיר על Y את הטופולוגיה המקסימלי עבורה f תהיה רציפה. נגדיר את זה ע"י $O \subseteq Y$ פתוחה אמ"ם $f^{-1}(O)$ פתוחה בX.

סוגי פונקציות: $f : X \to Y$

1. f רציפה אם לכל O פתוחה בY, $f^{-1}(O)$ פתוחה בX.
2. f פתוחה, אם לכל O פתוחה בX, $f(O)$ פתוחה בY.
3. f סגורה, אם לכל O סגורה בX, $f(O)$ סגורה בY.
4. f מנה, אם f על, ובנוסף, מתקיים O פתוחה בY אמ"ם $f^{-1}(O)$ פתוחה בX.

דוגמא: $f : [0,1] \to \{0,1\}$ כאשר $\{0,1\}$ עם הטופולוגיה: $\{\{0\}, \emptyset, \{0,1\}\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & [0, 0.5) \\ 1 & [0.5, 1] \end{cases}$$

רציפה, לא פתוחה כי למשל $\{1\} = f(0.5, 1)$, כלומר קבוצה פתוחה שהתמונה שלה לא פתוחה.

לא סגורה, כי למשל $\{0\} = f[0.2, 0.3]$, כלומר קבוצה סגורה שהתמונה שלה לא סגורה.

מנה: ראינו כבר שלכל קבוצה פתוחה, התמונה ההפוכה שלה פתוחה (זאת הדרישה ברציפות). יש רק קבוצה אחת שהיא לא פתוחה $\{1\}$, והתמונה ההפוכה שלה לא פתוחה. לכן הפונקציה היא פונקציית מנה.

כלומר, פונקציה יכולה להיות פונקציית מנה אע"פ שאינה פתוחה ואינה סגורה.

טענה: כל פונקציה $f : X \to Y$ שהיא רציפה, על ופתוחה, תהיה פונקציית מנה.

הוכחה: בשביל שf תהיה פונקציית מנה צריך שהיא תהיה על- נתון.

צריך שאם O פתוחה אז $f^{-1}(O)$ תהיה פתוחה- זה הרציפות.

ולבסוף, אם ידוע ש$f^{-1}(O)$ פתוחה, אז בגלל שf היא פונקציה פתוחה נקבל ש $f(f^{-1}(O))$ פתוחה. ובגלל שf על, זה שווה לO. כלומר, אם $f^{-1}(O)$ פתוחה, אז O פתוחה.

טענה: כל פונקציה $f : X \to Y$ שהיא רציפה, על וסגורה, תהיה פונקציית מנה.

הוכחה: בשביל שf תהיה פונקציית מנה צריך שהיא תהיה על- נתון.

צריך שאם O פתוחה אז $f^{-1}(O)$ תהיה פתוחה- זה הרציפות.

כעת, נניח שאנחנו יודעים ש$f^{-1}(O)$ פתוחה. אז $\left(f^{-1}(O)\right)^c$ סגורה. בגלל שf פונקציה סגורה, אז $f\left(\left(f^{-1}(O)\right)^c\right)$ סגורה. ובגלל שf על אז $O = f\left(\left(f^{-1}(O)\right)^c\right)^c$, משלים של קבוצה סגורה ולכן פתוח.

חזרה

תרגיל: יהי X מרחב מטרי, $K \subseteq X$ תת קבוצה קומפקטית. $C \subseteq X$ סגורה. הוכיחו ש$d(C,K) = 0 \iff C \cap K \neq \emptyset$.

פתרון: $\Longleftarrow$ אם יש איבר משותף אז המרחק בינו לעצמו הוא 0. ולכן האינפימום של המרחקים הוא 0.

$\Longrightarrow$ נסתכל על הפונקציה

$$f : K \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = d(x, C)$$

רציפה, ידוע. ולכן מינימום. כלומר, יש איבר $x \in K$ כך ש

$$f(x) = 0$$

כלומר, $d(x, C) = 0$. C סגורה. המרחק 0 זה אומר שאפשר לבנות סדרה $c_n \subseteq C$ כך ש$x \to c_n$. נבחר כל פעם $c_n \in C$ כך ש$d(c_n, x) < \frac{1}{n}$. אז x הוא גבול של סדרה מC. בגלל שC סגורה היא מכילה את הגבולות. כלומר, $x \in C$.

מצאנו איבר בחיתוך.

תרגיל: הוכיחו שכל פונקציה רציפה והפיכה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא הומיאומורפיזם. (שניהם עם הטופולוגיה האוקלידית)

פתרון: נתון שהפונקציה חח"ע ועל רציפה. נותר להוכיח שהיא פתוחה.

מספיק להוכיח שהתמונה של כל קטע היא פתוחה.

אנחנו נוכיח שהתמונה של קטע פתוח סופי היא קטע פתוח.

יהי קטע פתוח (a, b). נסתכל על הקטע הסגור $[a, b]$. זהו קטע קשיר ולכן $f[a, b]$ קשירה ב$\mathbb{R}$. תתי הקבוצות הקשירות של $\mathbb{R}$ הם קטעים מכל הסוגים. הקטע $[a, b]$ הוא בנוסף קומפקטי, ותמונה רציפה של קומפקטי היא קומפקטי. הקטע הקומפקטי היחיד היחיד הוא מהצורה $[c, d]$. כלומר

$$f[a, b] = [c, d]$$

לאן קצה קטע יכול ללכת? קצה קטע מקיים שאם נסיר אותו עדיין הקבוצה תהיה קשירה. לעומת זאת, ברגע שנסיר נקודה פנימית הקבוצה כבר לא קשירה. לכן קצה חייב ללכת לקצה. כלומר

$$f\{a, b\} = \{c, d\}$$

ולכן

$$f(a, b) = (c, d)$$

מש"ל.