

תרגיל 3

להגשה עד 25.11.15

שאלה 1

יהיו \mathbb{X}, \mathbb{Y} מרחבים טופולוגיים.
הוכיחו כי אם $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ רציפה אזי f פונקציה בורלית (כלומר, מדידה- $(\mathbb{B}(\mathbb{X}), \mathbb{B}(\mathbb{Y}))$).

שאלה 2

יהי (X, \mathbb{A}) מרחב מדיד, באשר $\mathbb{A} = \mathbb{P}(X)$.
מהן הפונקציות $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ המדידות- \mathbb{A} ?

שאלה 3

יהי (\mathbb{X}, \mathbb{A}) מרחב מדיד, נגדיר: $\mu: \mathbb{A} \rightarrow [0, \infty]$ על ידי:

$$\mu(E) := \begin{cases} |E| & |E| < \infty \\ \infty & |E| \not< \infty \end{cases}$$

באשר $|E|$ היא עוצמת E . הוכיחו כי: μ מידה חיובית מעל מעל \mathbb{A} . (מידה זו נקראת מידת הספירה).

שאלה 4

יהי (X, \mathbb{A}) מרחב מדיד, ולכל $i \in \{1, 2, 3\}$ תהי $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מדידה- \mathbb{A} .
לכל $x \in X$, נתבונן במשוואה:

$$g_x(t) := f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי למעשה משוואה ריבועית עם משתנה t .
הוכיחו כי קבוצת כל ה- x ים עבורם לפונקציה g_x יש שני שורשים שונים הינה מדידה- \mathbb{A} , כלומר:

$$\{x \in X : \exists t_1, t_2; t_1 \neq t_2 : g_x(t_1) = g_x(t_2) = 0\} \in \mathbb{A}$$

שאלה 5 (רשות)

תהי X קבוצה $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ אלגברה- σ מעל X . הוכיחו כי

$$|\mathbb{A}| \neq \aleph_0$$

בהנאה!!