<u>הרצאה 1</u>

<u>פסוק</u>

יחידת התוכן הבסיסית היא פסוק, כאשר פסוק יכול לקבל שני ערכים: אמת ושקר.
לשם קיצור נסמן פסוק אמת ב T ופסוק שקר ב F.

<u>קשרים לוגים</u>

<u>וגם</u> – נניח ש P ו Q הם פסוקים אז נאמר ש P וגם Q פסוק אמת רק אם P פסוק אמת וגם Q פסוק אמת.

<u>דוגמא</u>

P - קיבלתי מעל 90 במבחן. Q - המבחן התחיל בשעה שמונה בבוקר.
הפסוק P וגם Q הוא פסוק אמת רק אם קיבלתי מעל 90 במבחן וגם המבחן התחיל בשמונה בבוקר.

<u>סימון</u>

$P \wedge Q$

נוכל להראות את כל האפשרויות בעזרת טבלה שנקראת טבלת אמת

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

<u>או</u> - נניח ש P ו Q הם פסוקים אז נאמר ש P או Q פסוק אמת אם לפחות אחד מהפסוקים P, Q הוא פסוק אמת.

<u>סימון</u>

$P \vee Q$

<u>דוגמא</u>

בדוגמה הקודמת אם המבחן התחיל בשמונה אז הפסוק $P \vee Q$ הוא פסוק אמת ולא משנה מה הציון שקיבלתי.
אם קיבלתי מעל 90 הפסוק $P \vee Q$ הוא פסוק אמת ולא משנה באיזה שעה התחיל המבחן.

נציג את כל האפשרויות באמצעות טבלת אמת

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

<u>לא</u> – נניח ש P פסוק אז נאמר שלא P פסוק אמת רק אם P פסוק שקר. סימון $\neg P$

<u>דוגמא</u>

P - קיבלתי מעל 90 במבחן. הפסוק לא P הוא פסוק אמת רק אם קיבלתי לכל היותר 90.
נציג את כל האפשרויות בעזרת טבלת אמת.

P	$\neg P$
F	T
T	F

אם –אז - - נניח ש P ו Q הם פסוקים אז נאמר ש אם P אז Q פסוק אמת רק כאשר הפסוק P נכון אז הפסוק Q נכון.

שימו לב שאם הפסוק P שקרי אז בהכרח הפסוק אם P אז Q הוא פסוק אמת.

סימון $P \to Q$.

דוגמא

אם אני אנצח בתחרות אז אני אקבל פרס.

נסמן P -ניצחתי בתחרות, Q - קיבלתי פרס. הפסוק הלוגי המתאים הוא $P \to Q$

נראה את כל האפשרויות באמצעות טבלת אמת

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

ז"א הפסוק $P \to Q$ הוא פסוק שקר רק אם הפסוק P הוא פסוק אמת והפסוק Q הוא פסוק שקר.

שלילת טענה

הפסוק $P \to Q$ שקול לפסוק $\neg Q \to \neg P$ מכיוון שאם הפסוק $P \to Q$ הוא פסוק אמת והפסוק Q הוא פסוק שקר אז בהכרח שהפסוק P הוא פסוק אמת ולכן גם הפסוק $\neg Q \to \neg P$ הוא פסוק אמת.

אם ורק אם - נניח ש P ו Q הם פסוקים אז נאמר ש P אם ורק אם Q פסוק אמת אם הפסוק $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ הוא פסוק אמת.

נראה את כל האפשרויות באמצעות טבלת אמת

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

דוגמא

המרובע הוא מלבן אם ורק אם כל זוויותיו ישרות.

טאוטולוגיה

פסוק שערך האמת שלו הוא תמיד T נקרא טאוטולוגיה.

דוגמה

$P \wedge Q \to P$ הוא טאוטולוגיה מכיוון שערך האמת שלו הוא תמיד T.

נראה את כל האפשרויות בטבלת אמת

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \to P$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

הגדרה
הפסוקים P,P' הם שקולים אם הפסוק $P \leftrightarrow P'$ הוא טאוטולוגיה. סימון $P \equiv Q$

אם $P \to Q$ הוא טאוטולוגיה אז אומרים כי P הינו תנאי מספיק ל Q ואילו Q הוא תנאי הכרחי ל P.
אם הפסוקים P,Q שקולים אז P הוא תנאי הכרחי ומספיק ל Q.

חוקי דה מורגן
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
נראה את השקילות בעזרת טבלאות אמת

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	F

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	F	F	T	T
T	T	F	F	F

ניתן לראות את השקילות $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ באמצעות הטבלאות אמת.
באותו אופן ניתן להראות באמצעות טבלאות אמת את השקילות $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

דוגמא
תשובה שלילית לשאלה "האם עבר כאן קו 45 או קו 7" פירושה "לא עבר כאן קו 45 וגם לא עבר כאן קו 7"

כמתים
ישנם שני כמתים:
"לכל" סימון $\forall$.
"קיים" סימון $\exists$.

דוגמאות
1. ניתן לרשום הפונקציה שלילית לכל x באופן הבא: $\forall x\left(f(x)<0\right)$.
2. אם קיים ערך של x שעבורו הפונקציה חיובית - $\exists x\left(f(x)>0\right)$.

כיצד נוכיח או נסתור טענה
- כדי להוכיח שהפסוק $\forall x : P(x)$ אמיתי, יש להראות שהטענה P נכונה לכל ערך אפשרי של x.
- כדי להוכיח שהפסוק $\exists x : P(x)$ אמיתי, יש למצוא ערך של x שעבורו הטענה נכונה (דוגמה)

שלילת כמתים

כדי לשלול פסוק שבו הפעולה האחרונה היא כמת יש לשלול את הפסוק עבור הכמת השני.

ז"א

$$\neg\forall : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg\exists : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

דוגמאות

1. כדי להראות שהפונקציה לא שלילית לכל x יש להראות שקיים x שעבורו הפונקציה אי שלילית.
2. כדי להראות שלא קיים ערך של x שעבור הפונקציה שלילית יש להראות שלכל x הפונקציה אי שלילית.

הוכחות

הוכחה פורמלית של פסוק P הוא רצף של פסוקים $P_1,\dots,P_n$ שכל אחד מהם הוא או אקסיומה, או שאפשר לגזור אותו באופן פורמלי מפסוקים קודמים.

הוכחה בדרך השלילה

מכיוון שהפסוק $P \to Q$ שקול לפסוק $\neg P \to \neg Q$ אז כדי להוכיח את הפסוק $P \to Q$ מספיק להוכיח את הפסוק $\neg Q \to \neg P$.

דוגמה

נוכיח ש $\sqrt{2}$ אינו מספר רציונאלי.

נניח בשלילה ש $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונאלי ז"א קיים שבר מצומצם $\frac{p}{q}$ כך ש $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ ז"א $\frac{p^2}{q^2} = 2$.
$p^2 = 2q^2$ ז"א p^2 זוגי ולכן p זוגי. ניתן לרשום $p = 2p'$ ולכן מתקיים $2p'^2 = q^2$ ז"א q^2 זוגי ואז q זוגי. קיבלנו ש p,q זוגיים בסתירה לכך שהשבר הייה מצומצם.