פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 2: תנע קווי, עבודה ואנרגיה

1. חלקיק בעל מסהm_1 מתנגש אלסטית בחלקיק בעל מסה m_2. החלקיק m_2 נמצא תחילה במצב מנוחה במערכת היחוס של המעבדה. לאחר ההתנגשות מוסט המסלול של m_1 בזוית θ_1 מן הכוון ההתחלתי שלו.

(א) הראו כי $\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2}$ כאשר θ זוית ההסט במערכת מרכז המסה.

נסמן את המהירות של m_1 במעבדה ובמרכז המסה, לאחר ההתנגשות ב $\vec{u}_1$ ו $\vec{u_1'}$ בהתאמה. תהי $\vec{v}_{cm}$ מהירות מרכז המסה. אזי, מחיבור מהירויות נקבל $\vec{u}_1 = \vec{u}_1' + \vec{v}_{cm}$ ולכן

$$\tan\theta_1 = \frac{u_1'\sin\theta}{u_1'\cos\theta + v_{cm}}.$$

משימור אנרגיה (במערכת מרכז המסה) נובע

$$\frac{1}{2}m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

כאשר $\vec{v}_1'$ ו $\vec{v}_2'$ המהירויות לפני ההתנגשות (במערכת מרכז המסה) של m_1 ו m_2 בהתאמה ו $\vec{u}_2'$ המהירות לאחר ההתנגשות (במערכת מרכז המסה) של m_2 מאחר ובמרכז המסה התנע הכולל תמיד אפס, כלומר, $m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0$ וגם $m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = 0$ נקבל, לאחר הצבה במשוואת שימור האנרגיה כי $u_1' = v_1'$ כלומר, גודל המהירות במרכז המסה, לפני ואחרי ההתנגשות, נשמר. נשים לב גם כי, אם $\vec{v}$ המהירות של המסה הפוגעת (במעבדה) אז מחיבור מהירויות נקבל $\vec{v}_1' = \vec{v} - \vec{v}_{cm}$ ו $\vec{v}_2' = -\vec{v}_{cm}$. אם כן, $\vec{v} = \vec{v}_1' - \vec{v}_2' = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\vec{v}_1' = \frac{m_1+m_2}{m_1}\vec{v}_{cm}$ כאשר השוויון האחרון נובע מכך שמהירות מרכז המסה נתונה ע"י $\vec{v}_{cm} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$. מכאן ש

$$\vec{v}_1' = \frac{m_2}{m_1}\vec{v}_{cm}$$

ולכן

$$v_1' = u_1' = \frac{m_2}{m_1} v_{cm}.$$

נציב את הקשר האחרון במשוואה הקושרת בין הכוון במעבדה $\tan\theta_1$ לכוון במרכז המסה $\tan\theta$ ונקבל

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2}$$

כנדרש.

(ב) הראו כי הערך המקסימלי של זוית הפיזור θ_1 במערכת המעבדה נתון ע"י $\tan\theta_1 = A/\sqrt{1-A^2}$ כאשר $A = m_2/m_1$.

נציב $x = \cos\theta$ ונקבל

$$\tan\theta_1 = f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x + m_1/m_2}$$

נגזור, נשווה לאפס, נציב $x_0 = -m_2/m_1 = -A$ ונקבל $\max_{\theta_1}\tan\theta_1 = f(x_0) = A/\sqrt{1-A^2}$ כנדרש.

(ג) בניסוי נמצא, שלחקיקי α (אטומי הליום ללא אלקטרונים) העוברים דרך גז של אטומי מימן יש סטיה מקסימלית של 15^o (במערכת המעבדה). העריכו את המסה של חלקיק α יחסית לאטום המימן. $A = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^{-2}15}} \simeq 0.26$ ולכן $m_\alpha = m_H/A \simeq 3.86 m_H$[1]

2. מרכז המסה של התפלגות $\rho(\vec{r})$ נתון ע"י $\vec{r}_{cm} = \frac{\int d^d r \vec{r}\rho(\vec{r})}{\int d^d r \rho(\vec{r})}$. מצאו את מרכז המסה עבור ההתפלגות $\rho(x,y) = \frac{1}{(2-x)^2}$ במשולש המוגבל ע"י הקוים $x=0, y=0, y=1-x$.

$$m = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^2} dx \int_0^{1-x} dy = \ln 2 - \frac{1}{6}$$

ולכן

$$\vec{r}_{cm} = \left(\frac{\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x)^2} \int_0^{1-x} dy}{m}, \frac{\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^2} \int_0^{1-x} ydy}{m} \right) = \left(\frac{\ln 8 - 2}{\ln 2 - \frac{1}{6}}, \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \ln 4\right)}{\ln 2 - \frac{1}{6}} \right)$$

[1] ידוע כי הליום לא מיונן כבד בערך פי 4 ממימן ומאחר ומסת האלקטרון קטנה בערך פי 2000 ממסת הניוטרון והפרוטון זהו גם בקרוב טוב היחס המחושב עבור m_α/m_H.

3. גוף נע בשדה $\mathbf{F} = (x^3 + xy^2, y^3 + yx^2)$ במישור $x - y$.

(א) הוכיחו כי השדה משמר (רמז: השתמשו במשפט סטוקס $\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int\int \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$)

נסמן $\vec{F} = (F_x, F_y)$ ונקבל

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\hat{z} = (2xy - 2xy)\hat{z} = 0$$

ולכן השדה משמר בכל תחום ב $\mathbf{R}^2$

(ב) מצאו ע"י אינטגרציה של רכיבי השדה $\mathbf{F}$ פונקצית פוטנציאל $V(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$

הפוטנציאל מקיים $V = -\nabla\vec{F}$ ולכן

$$V = -\int (x^3 + xy^2)dx + f(y) = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2\right) + f(y).$$

כעת

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -x^2y + f'(y) = -(y^3 + x^2y)$$

ונקבל

$$f(y) = -\frac{1}{4}y^4$$

והפוטנציאל המבוקש הוא

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$$

.

(ג) חשבו בצורה מפורשת את העבודה הדרושה להעביר את הגוף מהראשית לנקודה $(2,1)$ לאורך מסלול המחבר תחילה את הראשית עם הנקודה $(2,0)$ לאורך ציר x ולאחר מכן את הנקודה $(2,0)$ עם הנקודה $(2,1)$ לאורך ציר y

$$W = -\int \vec{F} \cdot \vec{dr} = -\int_0^2 x^3 dx - \int_0^1 (4y + y^3)dy = -\frac{25}{4}$$

(ד) חזרו על החישוב מסעיף 3ג ע"י שמוש בפוטנציאל

מאחר והכח משמר נקבל

$$W = V(1,2) - V(0,0) = -2 - \frac{1}{4}(1+16) = -\frac{25}{4}$$

(ה) כתבו את הכח במערכת צירים פולרית. האם הכח מרכזי ?

נשתמש בטרנספורמציה $\hat{x} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$ $\hat{y} = \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta$ ונרשום

$$\vec{F} = r^3(\cos^3\theta + \cos\theta\sin^2\theta)(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta) +$$

$$+ r^3(\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta)(\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta) = r^3\hat{r}$$

וקיבלנו כמובן כח מרכזי.

4. חרוז מחליק על מסילה חסרת חיכוך אשר גובהה y נתון ע"י הפונקציה $y = f(x)$. ידוע כי בנקודה $(x,y) = (0,0)$ המסילה אנכית והחרוז עובר בנקודה זו עם מהירות אנכית $-V$ (מטה). הראו כי על מנת שהמהירות בכוון האנכי תהיה קבועה ושווה ל $-V$, צורת המסילה נתונה ע"י $y = f(x) = -\frac{(3gVx)^{2/3}}{2g}$

משימור אנרגיה נקבל

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mV^2,$$

ולכן המהירות נתונה ע"י

$$v = \sqrt{V^2 - 2gy}.$$

רכיב המהירות האנכי הוא $\dot{y} = v\sin\theta$ ושיפוע המסילה נתון ע"י $y' = \tan\theta = dy/dx$. לכן

$$\sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

ומהדרישה $\dot{y} = -V$ נקבל

$$\sqrt{V^2 - 2gy}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = -V.$$

נעלה בריבוע ונקבל את המשוואה

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{V}{\sqrt{-2gy}}$$

(בחרנו מינוס משום ש y מונוטונית יורדת). מאינטגרציה על

$$\int \sqrt{-2gy}dy = -V \int dx,$$

כאשר קבוע האינטגרציה הוא אפס מתנאי השפה $y(0) = 0$, נקבל את המסילה המבוקשת.