# חזרה

עקומה: $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. מסמנים גם $\gamma(t)$ ־ $t$ הוא פרמטר העקומה. $\gamma'$ הוא וקטור הכיוון+מהירות של העקומה ־ $\|\gamma'\|$ זה המהירות עצמה.

אורך העקומה הוא $s=\int_0^t\|\gamma'(u)\|\,\mathrm{d}u$. בעצם האורך הוא פונקציה של הפרמטר ־ $s(t)$. אם הפרמטריזציה היא טבעית(כלומר $\forall_t\gamma'(t)\neq 0$) אפשר להפוך את זה ולקבל $t(s)$, ואז $\gamma(s)=\gamma(t(s))$ היא פרמטריזציה במהירות יחידה, ואז וקטור המהירות הוא $\hat{T}=\frac{\mathrm{d}\gamma(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

וקטור הנורמל $\hat{N}$ מאונך ל$\hat{T}$. במישור, $\begin{pmatrix}\hat{T}'\\\hat{N}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa\\-\kappa&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T}\\\hat{N}\end{pmatrix}$, ואז

$$\hat{T}'=\kappa\hat{N}\qquad\hat{N}'=-\kappa\hat{T}$$

$\kappa$ היא העקמומיות. במישור אפשר להגדיר בצורה עקבית כיוון לעקמומיות ־ עקמומיות חיובית היא נגד כיוון השעון, ושלילית היא עם כיוון השעון.

אם $N,T$ הם וקטורי יחידה, אז

$$\hat{N}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\hat{T}$$

אפשר לחשב את הגודל של $k$:

$$\hat{T}'=\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}=\kappa\hat{N}$$

$$\hat{T}'\cdot\hat{N}=\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}\cdot\hat{N}=\kappa$$

$$\left\langle\hat{T}',\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}T\right\rangle=\kappa$$

במרחב:

$$T'=\kappa N\qquad\kappa\geq 0$$

ובוחרים וקטור נוסף, $\hat{B}$, כך ש$\left(\hat{T},\hat{N},\hat{B}\right)$ זה מערכת צירים ימנית. $\hat{B}$ צריך להיות ניצב ל$\hat{T}$ ול$\hat{N}$ ־ הוא יוצר יחד עם $\hat{T}$ "מישור" שבו העקומה נמצאת בסביבה מספיק קטנה של הנקודה.

מתקיים:

$$\begin{pmatrix}\hat{T}'\\\hat{N}'\\\hat{B}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T}\\\hat{N}\\\hat{B}\end{pmatrix}$$

כאשר $\kappa$ היא העקמומיות, ו$\tau$ מסמל עד כמה מהר משתנה המישור שבו העקומה נמצאת בסביבה מספיק קטנה של הנקודה.

נשים לב שגם במישור וגם במרחב קיבלנו מטריצה אנטי סימטרית - כי המטריצה שמעבירה כין $\hat{T},\hat{N},\hat{B}$ היא אורטוגונלית, והנגזרת של טרנספורמציה אורטוגונלית היא אנטיסימטרית, כי:

$$O^T(t)\,O(t)=I \implies \frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t}\right)^T$$

הוכחה:

$$\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T} & \hat{N} & \hat{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

נגזור

$$\begin{pmatrix}T'\\ N'\\ B'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T} & \hat{N} & \hat{B}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T' & N' & B'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(הערה: את וקטורי הנגזרת עשינו בלי כובע() כי בשלב הזה לא בטוח שהם בכלל וקטורי יחידה!)

$$\begin{pmatrix}T'\\ N'\\ B'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix}$$

$$A\cancel{\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T} & \hat{N} & \hat{B}\end{pmatrix}}+\cancel{\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T} & \hat{N} & \hat{B}\end{pmatrix}}A^T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A+A^T=0$$

$$A=-A^T$$

## מסקנה:

אם מערכת אורתוגונלית מקיימת מד"ר לינארית, אזי המטריצה חייבת להיות אנטי־סימטרית.

# משטחים

עד כה דיברנו על עקומות ותכונותיהן. עקומות הן יצורים מאוד פשוטים - יכולנו לראות את התכונות של הקו כאשר משכנים אותו בתוך מישור, אבל אין הרבה מה לעשות מעבר לזה, כי התכונות של הקו שאפשר לראות בלי לצאת מהקו לא משתנות יותר מדי.

עכשיו נדבר על משטחים. משטחים ב$\mathbb{R}^2$ זה לא כל כך מעניין - אבל משטחים ב$\mathbb{R}^3$ דווקא כן, כי משטחים עקומים מתנהגים שונה ממשטחים ישרים, גם אם מסתכלים רק על טיול במשטח עצמו - למשל משולש שכל זויותיו ישרות.

אנחנו נגביל את עצמנו בקורס הזה למשטחים שמשוכנים בתוך $\mathbb{R}^3$, אבל אפשר לדבר על תכונות אינטרינזיות - תכונות פנימיות של משטחים שלא תלויות בשיכון שלהם במרחב גבוה יותר.

## נדגים באמצעות כדור

כדור(Sphere) הוא אוסף כל הפתרונות של המשוואה

$$S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(אם רוצים לדבר על הכדור כולו, משתמשים בBall: $B^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1$

רוצים לעשות פרמטריזציה, אבל מבחינה טופולוגית הכדור לא שקול לא ל$\mathbb{R}^2$ ולא לאף קבוצה של $\mathbb{R}^2$!

לכן נאלץ לדבר כל פעם על חלקים מהכדור. מגדירים chart - מפה: מתת קבוצה של $\mathbb{R}^2$ ל$\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$. לדוגמה:

$$x, y \in B^2(1) \qquad \left(x^2 + y^2 < 1\right)$$

$$\varphi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$$

הבעיה היא שכל מפה כזו מכסה רק חלק - לכן אנו צריכים אטלס - אוסף של מפות שיכסה את כל הכדור:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \\
\varphi_2(x, y) &= \left(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \\
\varphi_3(x, y) &= \left(x, \sqrt{1 - x^2 - y^2}, y\right) \\
\varphi_4(x, y) &= \left(x, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y\right) \\
\varphi_5(x, y) &= \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y\right) \\
\varphi_6(x, y) &= \left(-\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y\right)
\end{aligned}$$

אין בעיה שיש חפיפה בין המפות - אבל יש דרישה שהיעקוביאן לא יתאפס.

רוצים גם שהמפות תהיינה חלקות - ואז אפשר להפוך אותן $\varphi_i^{-1}(\varphi_j)$.

## היטלים

גישה אחרת היא לעשות מיפוי מהספירה $S^2$ לכל $\mathbb{R}^2$, שנקרא היטל: נעמיד את הקוטב הדרומי על $(0,0)$, ולכל נקודה נעביר קו מהקוטב הצפוני דרך אותה נקודה עד למישור, ולשם נמפה אותה. כך מכסים את כל הנקודות פרט לקוטב הצפוני - בשביל לכסות גם אותו נעשה מפה נוספת, כשהפעם הוא יהיה $(0,0)$.

## עקומות בתוך משטחים

נסתכל על עקומה - $\gamma(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. לעקומה יש ווקטור כיוון+מהירות: $\gamma'(t)$.

אם המרחב הוא $\mathbb{R}^n$, אז אוסף כל הנקודות שעוברות בנקודה $P\in\mathbb{R}^n$ מגדירות מרחב וקטורי של כל הוקטורים המשיקים לעקומות האלה.

דוגמה: אם $P(x_0,y_0,z_0)$ ו$\gamma(0)=P$, אז $\gamma'(0)=(a,b,c)$.

אפשר לפרק את העקומה ל3 פונקציות:

$$\gamma(t)=(f(t),g(t),h(t))$$

ואז

$$f(0)=x_0\qquad g(0)=y_0\qquad h(0)=z_0$$

$$\gamma(0)=P$$

$$\gamma'(0)=(f'(0),g'(0),h'(0))$$

## מישור משיק

לכל נקודה במשטח אפשר להגדיר מישור משיק. במקרה של המרחב:

$$\forall_P T_P\mathbb{R}^3\cong\mathbb{R}^3$$

## הגדרה

אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה חלקה, אז לכל $x\in\mathbb{R}^n$ הדיפרנציאל של $f$ בנקודה $x$ הוא העתקה לינארית

$$\mathrm{d}_x f:T_x\mathbb{R}^n\to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$$

$$d_x f(\gamma'(0))=(f\circ\gamma)'(0)$$

כאשר $\gamma(0)=x$

## איך מחשבים?

$$(f\circ\gamma)'_i=(f(\gamma(t)))'_i=\sum_j\frac{\partial f^i}{\partial\gamma^j}\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t}$$

$$f(\gamma(t))_i=f_i(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\dots\gamma_n(t))$$

$$\mathrm{d}_x f\gamma'=J\gamma'$$

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \cdots\\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

$J$ נקרא היעקוביאן של ההעתקה בנקודה.

## דוגמה מספרית

$$f:(x,y,z)\to\left(x,x+y,z^2\right)$$

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2z\end{pmatrix}$$

אם לדוגמה ניקח את $P(1,1,1)$ ואת $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\in T_P\mathbb{R}^3$, אז נפעיל עליו את הדיפרנציאל

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$$

ניקח את הקו הישר:

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}1+2t\\1+t\\1+3t\end{pmatrix}$$

ונפעיל עליו את המיפוי:

$$f(\gamma(t))=\begin{pmatrix}1+2t\\2+3t\\(1+3t)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\2+3t\\1+6t+9t^2\end{pmatrix}$$

**זה לא נשאר קו ישר!**

המשיק בנקודה 0 הוא

$$\left(f\left(\gamma\left(0\right)\right)\right)' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6+18t|_{t=0} \end{pmatrix}$$

### סיכום

אם יש נקודה מסויימת ביריעה מסויימת ומיפוי שלה ליריעה אחרת, אז הדיפרנציאל ממפה את המרחב המשיק לנקודה במרחב המקור למרחב המשיק לתמונה של הנקודה במרחב התמונה.