משפט ליוביל

תהי f פונקציה שלמה וחסומה. אזי f פונקציה קבועה.

עקרון המקסימום המקומי

תהי f פונקציה אנליטית בתחום D. אם f <u>אינה קבועה</u> ב-D, אז אין ל-$|f|$ מקסימום מקומי ב-D.

עקרון המקסימום

תהי f אנליטית ב-D ורציפה ב-$\overline{D}$. אזי $|f|$ מקבלת את המקסימום שלה על השפה של D - ∂D.

משפט הערך הממוצע(גאוס)

תהי f אנליטית ב-$|z-z_0|<R$. אזי

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta \qquad (0<r<R)$$

תרגיל

נתונה f שלמה ו-$\operatorname{Re}(f)$ חסומה מלעיל. צ"ל: f קבועה.

הוכחה

נגדיר $g(z)=e^{f(z)}$ - פונקציה שלמה כתוצאה מהרכבה של פונקציות שלמות.

$$|g(z)|=\left|e^{f(z)}\right|=\left|e^{\operatorname{Re}(f(z))}\right|\cdot\underbrace{\left|e^{i\operatorname{Im}(f(z))}\right|}_{=1}\le e^{|\operatorname{Re}(f(z))|}\le e^{M} \qquad \left(\begin{array}{c} M\in\mathbb{R} \\ |f|\le M \end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ g חסומה, ולכן לפי משפט ליוביל, $g(z)$ קבועה.
נמצא $g'(z)$:

$$g'(z)=f'(z)\cdot e^{f(z)}=0$$

(כי g קבועה). $e^{f(z)}$ פונקציה קבועה $\Leftarrow 0=\forall_z f'(z) \Leftarrow f(z)$ <u>קבועה</u>.

תרגיל 2

נתונה f שלמה, f' חסומה. צ"ל: f היא פולינום ממעלה 1 לכל היותר.

הוכחה

f' שלמה(מסקנה מנוסחת קושי המוכללת) $\Leftarrow$ לפי ליוביל f' קבועה, כלומר $f' = C = \text{const}$
$\Leftarrow$ $f(z) = Cz + d$.

תרגיל

f שלמה. $|f(z)| \geq M > 0$. צ"ל: f קבועה.

הוכחה

לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $f(z) \neq 0$. נגדיר $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z)|} \leq \dfrac{1}{M}$. $g(z)$ חסומה, וגם שלמה כחלוקה של שתי פונקציות שלמות $\Leftarrow$ לפי משפט ליוביל, $g(z)$ קבועה $\Leftarrow$ $f(z)$ פונקציה קבועה.

$\blacksquare$

תרגיל 4

f שלמה ו<u>לא</u> קבועה. צ"ל: לא יכול להיות שיש לf מחזור של 1 וגם של i.

הוכחה

נסתכל בריבוע R(אורך הצלע 1). נניח בשלילה שקיימת פונקציה f עם מחזורים 1 וi. R קבוצה סגורה וחסומה, וכיוון שf רציפה בR, נסיק כי f חסומה בR. כלומר, קיים קבוע $M > 0$ כך ש$|f(z)| \leq M$. כיוון ש1 וi הם מחזורים של $f(z)$ $\Leftarrow$

$$f(z) = f(z + n + mi) \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

$\Leftarrow$תהי $z \in \mathbb{C}$, אזי קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ כך שעבור $z_0 \in R$ מתקיים

$$|f(z)| = |f(z_0 + n + mi)|$$

כלומר, קיבלנו כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)| \leq M$. כלומר, f חסומה. לפי משפט ליוביל, נקבל שf קבועה בסתירה לנתון $\Leftarrow$ לא קיימת פונקציה $f(z)$ עם מחזורים 1 וi.

תרגיל 5

מצאו את כל הפונקציות השלמות שמקיימות

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \, |f(z)| \leq M \left(1 + |z|^{\frac{4}{5}}\right) \qquad (M > 0)$$

פתרון

תהי $z_0 \in \mathbb{C}$ כלשהי. נסמן

$$C_R = \{z||z-z_0| = R\}$$

אזי

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C_R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot \cancel{2\pi} R\cdot \max\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right| =$$

$$= R\cdot \max_{z\in C_R}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right| \leq \frac{R}{R^2}M\left(1+|z|^{4/5}\right)$$

לכל $z\in C_R$ מתקיים

$$|z|-|z_0| \leq |z-z_0| = R \Rightarrow |z| \leq |z_0| + R$$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R^{5/5}}\left(1+(|z_0|+R)^{4/5}\right) = \frac{M}{R} + \frac{M(z_0+R)^{4/5}}{R} \xrightarrow[R\to 0]{} 0$$

$\Leftarrow 0 \geq |f'(z_0)|$ עבור $z_0\in\mathbb{C}$ $\Leftarrow$ $f'(z_0)=0$ $\Leftarrow$ $f(z)$ <u>קבועה</u>!

תרגיל 6(עקרון המינימום)

תהי f אנליטית בתחום חסום R ורציפה ב$\overline{R}$, ומתקיים $\forall_{z\in\overline{R}} f(z)\neq 0$, אזי $|f(z)|$ מקבלת מינימום בשפה ∂R.

הוכחה

נגדיר $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. לפי הנתון $g(z)$ פונקציה אנליטית בR ורציפה ב$\overline{R}$. לכן, ע"פ עקרון המקסימום, $|g(z)|$ מקבלת את הערך המקסימלי על השפה ∂R. ברור שבנקודה שg מקסימלית, $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z)|}$ - ואז $|f(z)|$ מינימלי. לכן $|f(z)|$מקבלת מינימום על השפה ∂R.

תרגיל 7

$$f(z) = e^{z^2}$$

1. יש למצוא את הערך המקסימלי של $|f|$ בעיגול היחידה, ואת נקודות המקסימום של f בעיגול זה.
2. יש למצוא את הערך המינימלי של $|f|$ בעיגול היחידה, ואת נקודות המינימום של f בעיגול זה.

פתרון

ברור כי f אינה קבועה בעיגול היחידה. לכן, ע"פ עקרון המקסימום, f מקבלת את המקסימום על השפה $\Leftarrow$על מעגל היחידה.

כלומר, נסמן $z = e^{i\theta}$,

$$|f(z)| = f\left(e^{i\theta}\right) = \left|e^{\left(e^{i\theta}\right)^2}\right| = \left|e^{\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)}\right| = e^{\cos(2\theta)}$$

ב$\theta = 0, \pi$ הערך המקסימלי הוא e

ב$\theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ הערך המינימלי הוא $\frac{1}{e}$

תרגיל

f, g אנליטיות בD.

$$f(z), g(z) \neq 0 \qquad \forall z \in D$$

נתון

$$|f| = |g| \qquad \forall z \in \partial D$$

צ"ל $f(z) = C \cdot g(z)$, $|C| = 1$.

פתרון

נגדיר פונקציה $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$. $h(z)$ אנליטית בD. ע"פ עקרון המקסימום, נסיק כי $|h(z)|$ מקבלת את הערך המקסימלי על השפה ∂D. כמו כן, $h(z) \neq 0$(כי $f(z) \neq 0$) ולכן ע"פ עקרון המינימום, $|h(z)|$ מקבלת את הערך המינימלי על ∂D. אבל:

$$|h(z)| = \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = 1 \qquad \forall z \in \partial D$$

כלומר, $|h(z)|$ קבועה על השפה ∂D. מכאן, $|h(z)|$ קבועה לכל $z \in D$(שכן המינימום והמקסימום שווים), כלומר $\forall_{z\in D}\, |h(z)| = 1$. כלומר קיבלנו $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = C \Leftarrow$ $f(z) = C \cdot g(z)$ וגם $|h(z)| = |C| = 1$.

תרגיל

1. צ"ל שלא קיימת פונקציה שלמה f כך שלכל $z=x+iy$ מתקיים $|f(z)|=e^{-x^2-y^2}$.
2. צ"ל שלא קיימת פונקציה שלמה f כך שלכל $z=x+iy$ מתקיים $|f(z)|=x^2+y^2+1$

פתרון

1. ערך מקסימלי מתקבל בנקודה $(0,0)$. כלומר, עבור תחום שהוא עיגול היחידה, המקסימום לא מתקבל על השפה $\Leftarrow$ לא קיימת פונקציה כזאת.
2. אם קיימת פונקציה f כזאת, אזי $\Leftarrow$ מקבלת מינימום על השפה(ניקח תחום עיגול היחידה). אבל גם כאן המינימום מתקבל במרכז.