אלגברה לינארית 2 (88113)
בחינת סיום (מועד ב')

מרצה: פרופ' רון עדין
מתרגלת: אמונה ליפסקר
משך הבחינה: שלוש שעות.
חומר עזר מותר: מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
נא לרשום בעמוד הראשון אילו שאלות נבחרו. בהעדר רישום, תיבדקנה ארבע השאלות הראשונות במחברת.
ניתן לסמן עמודים שלמים כ"טיוטה". נא הסבירו ונמקו בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה !

1.
א. הוכיחו: אם $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ כאשר a,b,c,d,e,f,g כולם שלמים אי-זוגיים, אז M הפיכה (מעל $\mathbb{R}$).
ב. הוכיחו: אם A ריבועית עם $\det(A)=1$, אז $\det(I+A^{-1})=\det(I+A)$.
ג. הוכיחו: אם $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך שכל השורות של B זהות לשורה הראשונה של A, אז $\det(A+B)=2\det(A)$.

2. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$, כאשר $a,b,c\in\mathbb{R}$ פרמטרים.
א. מצאו את הפולינום המינימלי של A; חלקו למקרים לפי הצורך.
ב. מצאו את כל ערכי הפרמטרים c,b,a שעבורם A לכסינה.
ג. מצאו את כל ערכי הפרמטרים c,b,a שעבורם A לכסינה אורתוגונלית.

3. נתון: $A,B\in\mathbb{R}^{6\times6}$ מטריצות עם פולינומים מינימליים
$m_A(x)=x^2-3x,\ \ m_B(x)=x^2-6x+9$
א. רשמו את כל צורות ז'ורדן האפשריות עבור B,A.
ב. כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם נתון, בנוסף, שהריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 3 הוא 3? ואם נתון שהריבוי הגיאומטרי הוא 4?
ג. האם ייתכן שהמטריצה A סימטרית? והמטריצה B? נמקו.

4. יהי $V=\mathbb{R}^4$, עם המכפלה הפנימית הרגילה, ויהי
$W=span\{(1,0,2,-1),(2,1,6,-1)\}\subseteq V$
א. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור W. בדקו את תשובתכם.
ב. מצאו בסיס עבור תת-המרחב הניצב $W^\perp$.
ג. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור $W^\perp$. בדקו את תשובתכם.
ד. יהי $v=(1,1,1,1)\in V$. מצאו את ההיטל הניצב של v על W ואת ההיטל הניצב של v על $W^\perp$. מהו סכום ההיטלים?

5.

א. תהי $A = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ -2+i & -2-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. מצאו מטריצה אוניטרית $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ומטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ המקיימות $U^{-1}AU = D$.

ב. הוכיחו: אם $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ אוניטרית אז $|\det(U)| = 1$.

ג. הוכיחו: אם $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ אוניטרית אז $|\mathrm{tr}(U)| \leq n$.