

שיטות נומריות מתקדמות – תרגיל 1

תרגיל 1:

א. תהי $A \in M_n$ מטריצה ריבועית. הראו כי

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|}$$

מגדיר נורמה מעל M_n .

ב. תהי $A \in M_n$ מטריצה ריבועית עם איברים a_{ij} . הראו כי

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2}$$

מגדיר נורמה מעל M_n . נקראת נורמת פרוביניוס. הראו כי

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{Trace}[AA^T]}$$

מגדיר נורמה מעל M_n . מצאו מכפלה מנימית מעל M_n המגדירה את הנורמה.

ג. הראו כי $L_2^w(a, b)$ הינו מרחב מכפלה פנימית. בפרט הראו כי

1. $L_2^w(a, b)$ מוגדר היטב, כלומר היחס \sim הינו יחס שקילות.

2. הפעולות האלמנטריות $+$, $-$, כפל בסקלאר ואינטגרציה מוגדרות היטב, כלומר

הגדירו את הפעולות הנ"ל על מחלקות השקילות של $L_2^w(a, b)$.

3. $L_2^w(a, b)$ הוא מרחב לינארי.

4. $\|\cdot\|$ הינה נורמה.

5. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.

תרגיל 2:

יהי $x^* \in \mathbb{R}^n$ פתרון ריבועים מינימאליים של מערכת לינארית $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^k$. כלומר, x^* הוא הווקטור עבורו $|Ax - b|^2$ מינימאלי.

א. הראו כי $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$.

ב. הראו כי x^* שווה להיטל של b על מרחב העמודות של A .

ג. הוכיחו שלכל $A \neq 0$ קיים פתרון והוא יחיד.

שאלה 3:

פתרו את מערכת המשוואות $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בעזרת השיטה האיטרטיבית עם איתחול $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Pan and Reif. שרטטו גרף של \log השגיאה כפונקציה של מספר האיטרציות. הראו שהשגיאה דועכת אקספוננציאלית ומצאו את מקדם האקספוננט.

תרגיל 4:

אחת ההגדרות של פולינומי צ'בישב היא

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

- א. הראו כי $T_n(x)$ הוא אכן פולינום (רמז: הצבה $x = \cos \theta$).
- ב. הראו כי הפולינומים אורתוגונלים בקטע $(-1, 1)$ עם פונק' המשקל $(1-x^2)^{-1/2}$.
- ג. מצאו את השורשים של $T_n(x)$.
- ד. חשבו בעזרת כלל הסכימה של גאוס את $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ עם שגיאה אפס.
- ה. העריכו את $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ בדיוק של 5 ספרות עשרוניות.

תרגיל 5:

- א. תהי $f(x) = \sin(x/2)$. קרבו את $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ על ידי כלל הטרפז וכלל סימסון. שרטטו גרף של לוג השגיאה (יחסית לערך הנכון של האינטגרל) כפונקציה של לוג n והראו את קצב הדעיכה של השגיאה.
- ב. חזרו על סעיף א' עם $g(x) = 1/(2 - \cos x)$. מה ההבדל?
- ג. הוכיחו את המשפט הבא:
תהי $f \in C^\infty$ פונקציה 2π -מחזורית, כלומר $\forall x, f(x) = f(x+2\pi)$.
נסמן את שגיאת הסכימה של כלל הטרפז עם n צמתים ב e_n .
אז, לכל $\alpha \geq 0$ קיים $C > 0$ כך ש

$$|e_n| \leq \frac{C}{n^\alpha}$$

כלומר, עבור פונקציות חלקות ומחזוריות כלל הטרפז מתכנס מהר יותר מכל חזקה.

רמז: נסמן את תוצאת הסכימה של פונק' f בעזרת כלל הטרפז עם n צמתים כ

$$M_n(f)$$

- הראו כי

$$M_n(e^{ikx}) = \frac{2\pi}{n} \frac{1 - e^{2\pi ik}}{1 - e^{2\pi ik/n}}$$

- הראו כי טור פורייה של f כנ"ל מתכנס מהר יותר מ $n^{-\alpha}$ לכל α (אינטגרציה בחלקים).
- הסיקו את המשפט.

