מבנים אלגבריים להנדסה, 218-83, פתרון בוחן 2 תשפ"א

י"ט בסיון ה'תשפ"א, 30.5.21

מרצה: פרופ' רון עדין.
מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן חמישה סעיפים, כל סעיף שווה 20 נקודות. יש לענות על כל הסעיפים.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: 80 דקות.
- חומר עזר: מחשבון.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

.1

(א) (20 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל חבורה G עם שמונה איברים יש תת־חבורה ציקלית $H \leq G$ כך ש־ $|H| = 4$.

(ב) (20 נק') חשבו: $20^{141} \pmod{29}$. נמקו.

פתרון :

א. הפרכה: לפי תרגילים אחרים משיעורי הבית ההפרכה חייבת להיות חבורה אבלית שאיננה ציקלית. ניקח את החבורה $G = (\mathbb{Z}_2)^3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. היא מסדר 8, וכל איבריה (למעט היחידה) מסדר 2:

$$(a, b, c)+(a, b, c) = (2a \equiv 0 \pmod 2), 2b \equiv 0 \pmod 2), 2c \equiv 0 \pmod 2))$$

לכן אין איבר מסדר 4, ואין תת־חבורה ציקלית עם ארבעה איברים.

ב. 29 ראשוני, ולכן לפי משפט פרמה, ומכיון ש־ $gcd(20, 29) = 1$ נקבל $20^{28} \equiv 1 \pmod{29}$. ולכן:

$$20^{141} = \underbrace{\left(20^{28}\right)^5}_{\equiv 1 \pmod{29}} \cdot 20 \equiv 20 \pmod{29}$$

.2

(א) (20 נק') האם קיים מונומורפיזם (כלומר, הומומורפיזם חח"ע) מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_4$ לחבורת הקווטרניונים Q? נמקו.

(ב) (20 נק') מצאו הומומורפיזם לא טריוויאלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_4$ לחבורת התמורות S_3 (כאשר הומומורפיזם $\varphi : G \to H$ נקרא טריוויאלי אם $\forall g \in G :$ $\varphi(g) = e_H$, כלומר, כל איברי G נשלחים לאיבר היחידה של H).

פתרון :

א. כן. נגדיר $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to Q$ לפי יוצר:

$$\varphi(1) = i$$

ומכאן:

$$\forall a \in \mathbb{Z}_4 : \varphi(a) = i^a$$

ובצורה מפורשת:

$$\varphi(2) = -1, \varphi(3) = -i, \varphi(0) = 1$$

מכיון שהגדרנו לפי יוצר, ואיבר היחידה נשלח לאיבר היחידה המתאים, זהו בוודאי הומ', והוא חח"ע כפי שרואים בצורה המפורשת.

ב. נגדיר $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to S_3$ לפי יוצר:

$$\varphi(1) = (1,2)$$

ומכאן:

$$\forall a \in \mathbb{Z}_4 : \varphi(a) = (1,2)^a$$

ובצורה מפורשת:

$$\varphi(2) = \varphi(0) = id, \varphi(3) = (1,2)$$

מכיון שהגדרנו לפי יוצר, ואיבר היחידה נשלח לאיבר היחידה המתאים, זהו בוודאי הומ', והוא איננו טריוויאלי שהרי $\varphi(1) = (1,2) \neq id$.

3. (20 נק') תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורות נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : \ xy = yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$].

פתרון: יהא $x \in N, y \in K$. מהגדרת N חבורה נורמלית נקבל כי

$$y^{-1}xy \in N$$

ומסגירות בחבורה נקבל כי גם

$$x^{-1}y^{-1}xy \in N$$

באופן דומה, מנורמליות של K נקבל כי

$$x^{-1}y^{-1}x \in K$$

ועם סגירות

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K \cap N = \{e\}$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy = e$$

שזה אומר

$$xy = yx$$