מבנים אלגבריים ־ תירגול 1

27 באוקטובר 2015

הקדמה

תהא X נסתכל על הקבוצה $X^X=\{f:X\to X\}$, עבור שתי פונקציות $f,g\in X^X$ מוגדרת ההרכבה $g\circ f\in X^X$ כך: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$
דוגמא: עבור $X=\{1,2,3\}$ נסתכל על הפונקציות $f:1\to 1,2\rightleftarrows 3, g:1\rightleftarrows 2,3\to 3$ אזי $g\circ f:(1,2,3), f\circ g:(1,3,2)$. בפרט $g\circ f\neq f\circ g$.
הערה: $id:X\to X$ המוגדרת $id(x)=x$ נקראת הזהות והיא מקיימת $id\circ f=f\circ id=f$.
הגדרה: הזוג הסדור $(G,*)$ תקרא חבורה אם (G היא קבוצה, $*$ פעולה בינארית על G):

1. סגירות־ $\forall a,b\in G: a*b\in G$
2. קיבוציות ־ $\forall g_1,g_2,g_3:\ (g_1*g_2)*g_3=g_1*(g_2*g_3)$
3. איבר יחידה ־ $\exists e\in G:\ \forall g\in G:\ g*e=e*g=g$
4. הופכי־ $\forall g\in G\exists h:\ gh=hg=e$

מונאיד הוא חבורה בלי תנאי ההפוכי.

החבורה הסימטרית S_n

עבור $X=\{1,2,\dots n\}$, הקבוצה $\{f:X\to X\mid f\ \text{bijection}\ \}$ עם הרכבה היא חבורה המסומנת כ S_n ונקראת החבורה הסימטרית (או חבורת התמורות). היחידה בחבורה היא פונקצית הזהות.

דרך סטנרטית להציג תמורה היא בצורה $\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$. דרך נוספת היא בעזרת מחזורים זרים. נדגים זאת בעזרת S_6.
תהא $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&6&5&4&2\end{pmatrix}\in S_6$ תמורה. אזי ניתן לרשום אותה כ $(1)\,(45)\,(2,3,6)$ (הפירוש הוא ש 2 הולך ל 3, 3 הולך ל 6 ו 6 הולך ל 2).
הגדרה : מחזור היא תמורה מהצורה $(i_1,i_2\dots i_m)$. מחזורים יקראו זרים אם אין להם מספר משותף.
הערות:

1. מחזורים זרים מתחלפים ביניהם. כלומר $\sigma_2\sigma_1=\sigma_1\sigma_2$. למשל $(6,3)\,(1,2,5)=(1,2,5)\,(6,3)$

2. ההופכי של $(i_1, i_2 \dots i_m)$ הוא $(i_m, i_{m-1} \dots i_1)$. למשל $(1,3,4)^{-1} = (4,3,1)$

3. הכפלת מחזור בעצמו $(1,2,3,4,5,6)^4 = (1,5,3)(2,6,4)$. בצירוף עם הערה 1 נקבל כי $[(1,2,5)(6,3)]^4 = (1,2,5)^4 (6,3)^4$

4. המחזור $(i_1, i_2 \dots i_m)$ הוא מאורך m. למשל, $(1,2,5)$ הוא מאורך 3 (שימו לב כי $(1,2,3)^3 = id$)

5. מחזורים מאורך 1 נוהגים להשמיט בכתיב המחזורים.

6. מחזור מאורך 2 נקרא חילוף

7. $(i_1, i_2 \dots i_m) = (i_m, i_1 \dots i_{m-1})$. למשל $(1,2,3,4) = (2,3,4,1) = (3,4,1,2) = (4,1,2,3)$

8. מתקיים כי $(i_1, i_2 \dots i_m) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{m-1}, i_m)$ ולכן כל תמורה ניתן להציג כמכפלה של חילופים. למשל $(1,3,5,6) = (1,3)(3,5)(5,6)$