תרגיל 4

26 באוגוסט 2017

1. תהי $f : X \to Y$ פונקציה ו־$B \subseteq Y$.
   א. הוכיחו כי: $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, ושיש שיוויון אם f על.
   ב. מצאו דוגמא לפונקציה כנ"ל כך שההכלה היא הכלה ממש.

2. תהי $f : X \to Y$ פונקציה ותהיינה תתי הקבוצות $A_1, A_2 \subseteq X, B_1, B_2 \subseteq Y$.
   הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
   ב. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f(B_2)$.
   ג. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
   ד. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
   ה. $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$.
   ו. $f(A_1^c) = (f(A_1))^c$.
   ז. $f(A_1 \triangle A_2) = f(A_1) \triangle f(A_2)$.
   ח. $f^{-1}(B_1 \triangle B_2) = f^{-1}(B_1) \triangle f^{-1}(B_2)$.

3. שאלה ממבחן: תהי X קבוצה, $f : X \to X$ פונקציה, ותהיינה $A, B \subseteq X$ הוכיחו או הפריכו:

$$f(A \setminus B^c) = f(A) \setminus (f(B))^c$$

4. תהיינה A, B קבוצות, תהא $f : A \to B$ פונקציה, ונגדיר פונקציה נוספת $g : P(B) \to P(A)$ ע"י:

$$g(X) = f^{-1}[X]$$

   הוכיחו: g חח"ע $\iff$ f על.

5. תהי X קבוצה, ותהי $f: X \to X$ פונקציה המקיימת $f \circ f = I_X$ (כלומר, ההרכבה של הפונקציה עם עצמה זה הזהות). נגדיר:

$$A = \{x \in X | f(x) \neq x\}$$

הוכיחו:

א. $f[A] = A$.

ב. אם A סופית אז גודלה זוגי.

6. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A מוכלת ממש ב־B אז $|A| < |B|$.

ב. אם $|A| > 1$ אז $|A| < |A \times A|$.

7. על הקבוצה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (אוסף הפונקציות מהטבעיים לעצמם) נגדיר יחס $\sim$ ע"י: לכל $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$f \sim g \iff Im(f) = Im(g)$$

א. הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות.

ב. עבור הפונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n) = 17$ מצאו את $|[f]_\sim|$.

ג. הוכיחו: $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\sim\right| = |P(\mathbb{N})|$.

8. א. תהיינה A, B קבוצות כך ש $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ הוכיחו:

$$|A| = |B|$$

ב. תהיינה A, B קבוצות זרות. הוכיחו:

$$|P(A \cup B)| = |P(A) \times P(B)|$$