

פיסיקה למתמטיקאים

מרכז המסה

1. מרכז המסה של מערכת עם N מסות נקודתיות m_i נתון ע"י

$$(1) \quad \vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

נגדיר באופן דומה את מרכז המסה של מערכת עם צפיפות מסה $\rho(\vec{r})$ להיות

$$(2) \quad \vec{r}_{cm} = \frac{\int \rho(\vec{r}) \vec{r} d^d r}{\int \rho(\vec{r}) d^d r}.$$

מהירות מרכז המסה (של מערכת בדידה) נתונה ע"י

$$(3) \quad \vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i}.$$

משפט: התנע הכולל במרכז המסה שווה לאפס

¹הוכחה: נסמן ב \vec{p}_{tot} את התנע הכולל במרכז המסה. אזי

$$(4) \quad \vec{p}_{tot} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{cm}) = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i m_i \frac{\sum_j \vec{p}_j}{\sum_i m_i} = 0.$$

2. חשבו את מרכז המסה של מוט באורך L עם מסה M כאשר

(א) צפיפות המסה אחידה

צפיפות המסה היא M/L ולכן ממשואה (2) נקבל

$$(5) \quad x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^L \frac{M}{L} x dx = \frac{L}{2}$$

(ב) צפיפות המסה נתונה ע"י $\lambda = \frac{2M}{L^2} x$

באופן דומה נקבל

$$(6) \quad x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^L \frac{2M}{L^2} x^2 dx = \frac{2}{3} L$$

¹ההוכחה עבור מערכת רציפה, דומה