

תרגיל 2 – מבוא לאנליזה 1

1. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי הסדרות הבאות מתכנסות:

$$a_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n} \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{5n}{n^2 + 3n + 1} \quad (\text{ב})$$

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \quad (\text{ג})$$

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n^2} & n \text{ odd} \\ 1 - \frac{1}{n} & n \text{ even} \end{cases} \quad (\text{ד})$$

2. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול כי הסדרות הבאות אינן מתכנסות:

$$a_n = 3 + (-1)^n \quad (\text{א})$$

$$a_n = 3 + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad (\text{ב})$$

רמז: לכל $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(2\pi k) = 1$ ו- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$

$$a_n = \sqrt{n+1} \quad (\text{ג})$$

3. הוכיחו או הפריכו:

$$(\text{א}) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R} \text{ ו-} a_n > 10 \text{ לכל } n \text{ טבעי, אז } L > 10$$

$$(\text{ב}) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R} \text{ אז } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$$

$$(\text{ג}) \text{ אם } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L} \text{ אז } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L > 0$$

$$(\text{ד}) \text{ כמו הסעיף הקודם, כשבנוסף נתון } a_n > 0 \text{ לכל } n$$