תרגול 3-אושרית

שילוש מטריצות וחזרה על פולינומים בקטנה ופולינום מינימלי

1. הגדרה: מטריצה A תקרא ניתנת לשילוש אם היא דומה למשולשית.

   (א) למשל־ מטריצה משולשית, מטריצה לכסינה.

   (ב) הערה: Tניתנת לשילוש אם $[T]$ניתנת לשילוש. או באופן שקול קיים בסיס B כך ש $[T]_B$ משולשית

2. משפט: תהא A מטריצה אזי הפ"א מלל אמ"מ היא ניתנת לשילוש

אלגוריתם לשילוש מטריצה

שלב 1: ניקח את האיחוד של הבסיסים למרחבים העצמיים E ונשלים אותו לבסיס B.

שלב 2: נשים את וקטורי B בעמודות מטריצה P ונביט במטריצה $Q = P^{-1}AP$.

שלב 3: נסמן $k = |E|$. נסמן ב Q_k את המטריצה המתקבלת מ Q על ידי מחיקת k השורות הראשונות ו k העמודות הראשונות.

שלב 4:

אפשרות 1 - Q_k משולשית עליונה, במקרה זה נעבור לשלב 5.

אפשרות 2 - Q_k לא משולשית עליונה, במקרה זה נחזור לשלב 1 ונמשיך בתהליך עד שנקבל מטריצה שהיא משולשית עליונה. נשים לב שסדר המטריצה Q_k קטן ממש מסדר המטריצה Q, מכיוון שמטריצה מסדר 1 היא משולשית עליונה התהליך הרקורסיבי יסתיים. לאחר סיום התהליך הרקורסיבי נקבל מטריצה P_1 שעבורה $Q_k = P_1^{-1}AP_1$.

שלב 5: נסמן $P_1' = I_k \oplus P_1$, כאשר I_k הינה המטריצה היחידה מגודל k.

שלב 6: המטריצה $(PP_1')^{-1}A(PP_1') = P_1'^{-1}P^{-1}APP_1'$ היא משולשית עליונה.

דוגמא

נשלש את המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -4 & -5\\ 1 & 1 & -1 & -3\\ 2 & 5 & 9 & 12\\ -1 & -2 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

ראשית נמצא את הפולינום האופייני:

$$P_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2$$

הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, לכן המטריצה ניתנת לשילוש.

טיפול מקדים ובדיקה
שניתן לשלש בכלל

הערכים העצמיים הינם $1,2$.

לאחר חישוב בסיסים לערכים העצמיים אנו מקבלים: $V_1=span\{(1,-2,1,0)\}, V_2=span\{(1,0,-2,1)\}$.

נסמן $E=\{(1,-2,1,0),(1,0,-2,1)\}$ ונשלים אותו לבסיס.

$B=\{(1,-2,1,0),(1,0,-2,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

שלב 1

נסמן

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-2&0&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$.Q=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0.5&1.5\\0&2&-4.5&-6.5\\0&0&-0.5&-2.5\\0&0&1.5&3.5\end{pmatrix}$$

שלב 2

נסמן $Q_2=\begin{pmatrix}-0.5&-2.5\\1.5&3.5\end{pmatrix}$ במקרה זה קיבלנו מטריצה לכסינה ועבור $P_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-0.6\end{pmatrix}$ נקבל

$$.P_1^{-1}Q_2P_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

בE יש 2 איברים ולכן k=2

שלבים 3 4

לבסוף נסמן $.P_1'=I_2\oplus P_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-0.6\end{pmatrix}$

שלב 5

שלב 6

סה"כ נקבל

$$P_1'^{-1}P^{-1}APP_1' = (PP_1')^{-1}A(PP_1') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -0.4 \\ 0 & 2 & 2 & -0.6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

אכן
משולשית
עליונה

תזכורות וחידושים -פולינומים

מקביל לחילוק מספרים עם שארית רק בפולינומים

1. חילוק פולינומים: לכל $a(x)$ ולכל $b(x) \neq 0$ מתקיים כי קיימים ויחידים $q(x), r(x)$ כך ש

$$a = qb + r$$

כאשר $\deg(r) < \deg(q)$ או $r = 0$

(א) דוגמא לחילוק: חלק את $a(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$ ב $b(x) = x^2 + 1$

פתרון

$$\begin{array}{c|c}
2x - 3 & \\
\hline
2x^3 - 3x^2 + x + 1 & x^2 + 1 \\
 & \\
2x^3 + 2x & \\
\hline
-3x^2 - x + 1 & \\
 & \\
-3x^2 - 3 & \\
\hline
-x + 4 &
\end{array}$$

ולכן $2x^3 - 3x^2 + x + 1 = (2x - 3)\left(x^2 + 1\right) + (-x + 4)$

(ב) דוגמא לניחוש שורש: פרק את x^3+x^2+x+1 לגורמים

פתרון: רואים כי -1 הוא שורש של הפולינום ולכן $(x+1)$ מחלק אותו.

$$\begin{array}{c|c}
x^2+1 & \\
\hline
x^3+x^2+x+1 & x+1 \\
 & \\
x^3+x^2 & \\
\hline
x+1 & \\
 & \\
x+1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

ולכן $x^3+x^2+x+1=(x+1)\left(x^2+1\right)=(x+1)(x-i)(x+i)$

הגדרה: פולינום מתוקן הוא פולינום עם מקדם מוביל =1

דוגמאות: מתוקן $x^{12}+100$ לא מתוקן $\frac{1}{2}x^3$

תרגיל: הוכיחו כי 2 פולינומים מתוקנים בעלי אותה דרגה המחלקים זה את זה שווים.

פתרון:

יהיו $p(x)$ ו-$q(x)$ פולינומים מתוקנים ושווי דרגה.

ידוע ש- $p(x)|q(x)$ $\wedge$ $q(x)|p(x)$ צ"ל: $p(x)=q(x)$.

נתבונן בפולינום $p(x)-q(x)$. נשים ♡ כי מספיק להוכיח כי $p(x)-q(x)$ הוא פולינום האפס.

ראשית נשים ♡ כי $\deg(p(x)) > \deg(p(x)-q(x))$ ← כי אלו פולינומים מתוקנים ולכן המקדם של החזקה הכי גבוהה של $p(x)$ ו-$q(x)$ הוא 1.

נשים ♡ כי $q(x)$ מחלק את $p(x)-q(x)$.

כי $q(x)|q(x)$ מאחר ו פולינום מחלק את עצמו.

ונתון $q(x)|p(x)$

$\Leftarrow$ מצאנו פולינום מדרגה גדולה יותר שמחלק את $p(x)-q(x)$

$\Leftarrow$ $p(x)-q(x)$ הוא פולינום האפס.

הגדרה: יהיו p,q פולינומים אזי

(א) $d=\gcd(p,q)$ הוא הפולינום המתוקן המקיים $d|p,q$ ובנוסף, כל פולינום שמחלק את p,q מחלק את d

(ב) $l=lcm(p,q)$ הוא הפולינום המתוקן המקיים $p,q|l$ ובנוסף, כל פולינום שמתחלק ב p,q מתחלק ע"י l

מחלק משותף מקסימלי

מחלק משותף מינימלי

(ג) דוגמא $p = (x-1)^2(x+2)(x-3)^3 \, , q = 2(x-5)(x-1)^3(x-3)$ אזי

$$\gcd = (x-1)^2(x-3)\, , lcm = (x-1)^3(x+2)(x-3)^3(x-5)$$

פולינום מינימלי

הגדרה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$
"הפולינום המינימלי" של A הוא פולינום מתוקן (1) מדרגה מינימלית (2)
ש- A מאפסת (3)

בקיצור – נכתב פ"מ

סימון: $m_A(\lambda)$ הפול' המינימלי של A.
$P_A(\lambda)$ הפול' האופייני של A

הערה: $m_A \mid P_A$
$\deg m_A(\lambda) \le \deg P_A(\lambda)$

דוגמאות: I : אזי $m_I(x) = x-1$. למשל $m_0(x) = x$

התאמת המונח פ"מ להע"ל

ג. הגדרה: הפ"מ של $T: V \to T$ מוגדר להיות $m_T(x)$ המקיים $m_T(T)=0$ וגם לכל $p(T)=0$ מתקיים $m_T|p$.

(א) הערה: $m_T = m_{[T]}$

כלומר פ"מ של המייצגת שווה לפ"מ של ההעתקה

תרגיל:

יהא $T: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ המוגדרת $T(A)=A^t+A$. מצאו את הפ"א והמינימאלי של T.

פתרון:

נחפש ע"ע: $T(A)=\lambda A$ אמ"מ $A^t+A=\lambda A$ אמ"מ $A^t=(\lambda-1)A$

אם A סימטרית נקבל כי $\lambda=2$ ע"ע וגם ש $T-2I$ מאפס כל מטריצה סימטרית

אם A אנטי סימטריצ נקבל $\lambda=0$ ע"ע. וגם ש T מאפס כל מטריצה אנטי סימטרית

לכן $x(x-2)$ מופיע בפ"א ובפ"מ ו $T(T-2I)$ מאפס כל מטריצה סימטרית ומאפס כל מטריצה אנטי סימטרית

כיוון שכל מטריצה $B=B_1+B_2$ עבור B_1 סימטרית ו B_2 אנטי סימטרית נקבל כי $T(T-2I)$ מאפס כל מטריצה

לכן $m_T(x)=x(x-2)$

ראינו בלינארית 1

בנוסף, הר"ג של $2 = n+\frac{n^2-n}{2}$ = מימד מרחב המטריצות הסימטריות. הר"ג של $0 = \frac{n^2-n}{2}$ = מימד מרחב המטריצות האנטי סימטריות.

כיוון שהסכום שלהם הוא n זהו גם הר"א שלהם

תכונות

1. לכל פולינום f כך ש $f(A)=0$ מתקיים $m_A(x)|f(x)$, בפרט ממשפט קיילי-המילטון נובע כי הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני.
2. לפולינום האופייני והפולינום המינימלי בדיוק אותם גורמים אי פריקים. בפרט, השורשים של הפולינום המינימלי הם הערכים העצמיים של המטריצה.

תזכורת :

משפט קיילי המילטון: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

נסמן P_A = הפ"א של A. אז: $P_A(A)=0$

מסקנה

על מנת לחשב את הפולינום האופייני, נמצא את הפולינום המכיל את הגורמים האי פריקים של הפולינום האופייני, בחזקות הכי נמוכות, המאפס את המטריצה.

<u>תרגיל</u>

מצא את הפולינום המינימלי של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

הפולינום האופייני הוא $P_A(x)=(x-1)^2(x-2)$.

מציאה מפורשת שלו שיעורי בית

לכן שתי האפשרויות היחידות לפולינום המינימלי הן:

$(x-1)^2(x-2)$, $(x-1)(x-2)$.

כי הוא מדרגה נמוכה יותר

נציב את המטריצה בפולינום $(x-1)(x-2)$ ואכן נקבל אפס.

הפולינום המינימלי הוא $m_A(x)=(x-1)(x-2)$.

תרגיל:

הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

פתרון:

$$\underbrace{P^{-1}B P}\, \underbrace{P^{-1}B P} \ldots P^{-1}BP$$

$$P^{-1}B\underbrace{PP^{-1}}_{I}BP \ldots P^{-1}BP$$

טענת עזר:

תחילה נוכיח שאם המטריצות A,B דומות אז לכל פולינום f המטריצות $f(A),f(B)$ דומות.

הוכחת טענת עזר:

נסמן $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. מכיוון ש A,B דומות קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A=P^{-1}BP$ ואז לכל n טבעי מתקיים $A^n=P^{-1}B^nP$.

$$f(A)=f\left(P^{-1}BP\right)=a_n\left(P^{-1}BP\right)^n+a_{n-1}\left(P^{-1}BP\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(P^{-1}BP\right)+a_0$$

$$=a_n\left(P^{-1}B^nP\right)+a_{n-1}\left(P^{-1}B^{n-1}P\right)+\ldots+a_1\left(P^{-1}BP\right)+a_0=P^{-1}\left(a_nB^n+a_{n-1}B^{n-1}+\ldots+a_1B+a_0\right)P=P^{-1}f(B)P$$

המשך הוכחה:

המטריצה היחידה הדומה למטריצת האפס הינה מטריצת האפס עצמה.

אם A,B דומות אז $f(A),f(B)$ דומות ולכן $f(A)=0$ אם ורק אם $f(B)=0$.

כיוון שהפולינומים המאפסים מטריצות דומות הם אותם פולינומים, בפרט המינימלי המתוקן מביניהם הוא אותו אחד.

תרגיל:

תהי A ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הינו $m_A(x)=(x-1)^2$.

יהא $f(x)=x^2+4x+3$ הוכח כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

פתרון:

$$f(A)=A^2+4A+3I=\underbrace{(A-I)^2}_{\text{אפס –מטריצה מאפסת את הפ"מ}}+6A+2I=6A+I.$$

נוכיח ש $|f(A)|\neq 0$ ואז המטריצה $f(A)$ הפיכה.

נניח בשלילה ש $|f(A)|=0$ ז"א $|6A+I|=0 \Rightarrow$

$|6A+I| = |6\cdot(A+\frac{1}{6}I)| = 0$

$6^n|A-\frac{-1}{6}I| = 0.$

$\Leftarrow -\frac{1}{6}$ ע"ע של A אך ע"ע של A

בגלל $-\frac{1}{6}$ לא שורש של הפ"מ

וסתירה.

תרגיל:

תהי A מטריצה אידמפוטנטית, כלומר $A^2 = A$.

1. מהן האפשרויות לפולינום המינימלי של A ולערך עצמי של A?
2. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים.
3. מהן האפשרויות עבור $tr(A)$?

פתרון:

סעיף 1

השוויון $A^2 = A$ שקול לכך שהפולינום $f(x) = x^2 - x$ מאפס את המטריצה A.

כיוון שהפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המאפס את המטריצה, האפשרויות לפולינום המינימלי הן:
$f_1(x) = x, f_2(x) = x-1, f_3(x) = x(x-1)$.

סעיף 2

כיוון שהגורמים האי פריקים של הפולינום האופייני מופיעים בפולינום המינימלי, ומכיוון שהפולינום המינימלי כאן מכיל רק גורמים ליניאריים, הפולינום האופייני חייב להתפרק לגורמים ליניאריים.

סעיף 3

כיוון שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים, המטריצה ניתנת לשילוש. כיוון שלמטריצות דומות אותו trace, נובע שה trace של המטריצה ניתנת לשילוש הוא סכום הערכים העצמיים כולל חזרות.
מכיוון שהערכים העצמיים מופיעים על האלכסון של הצורה המשולשת.
סה"כ נקבל שהאפשרויות ל trace הן כל מספר טבעי בין 0 ל n,
כתלות בריבוי האלגברי של הערך העצמי 1.
ניתן למצוא דוגמאות עבור כל אחד מהמקרים

נאמר כאן ללא הוכחה.
הוכחה שיעורי בית

בהצלחה!!