12-12-2010 (1)

ליניארית 1 - תרגול 9 (מתמטיקה)

הנושא: למת ההחלפה, בסיס ומימד, מרחב השורה והעמודה

למת ההחלפה של שטייניץ

יהא V מ"ו, ויהיו $A \subseteq V$ בת"ל, $B \subseteq V$ פורשת. אזי לכל $a \in A$ אפשר למצוא $b \in B$ כך, ש- $b \notin A \setminus \{a\}$, והקבוצה $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ היא בת"ל.

דוגמה:

$V=\mathbb{R}^2$, יהיו $A=\{(2,3),(5,7)\}$, $B=\{(1,3),(2,5),(8,6)\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$ (הוכחה מאוחרת).
חישוב מאוחר

נבחר $a=(2,3) \in A$ ו- $b=(8,6) \in B$. אזי $b \notin A \setminus \{a\}$ ואכן הקבוצה $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} = \{(5,7),(8,6)\}$ היא בת"ל.

הוכחת הלמה: (אפשר לדלג)

נוכיח בשלילה: נניח שקיים $a \in A$ כך שלכל $b \in B$ מתקיים אחד מהשניים:
(I) $b \in A \setminus \{a\}$ או (II) $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ ת"ל
כעת: מ-(I) אנו יכולים להסיק כי: $b \in Span(A \setminus \{a\})$.
A הייתה בת"ל ולכן $A \setminus \{a\}$ בת"ל ולכן אם $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ היא ת"ל (II)
אנו מסיקים ש-$b \in Span(A \setminus \{a\})$.
הנ"ל מתקיים לכל $b \in B$ ולכן $B \subseteq Span(A \setminus \{a\}) \Leftarrow (A \setminus \{a\})$ פורשת.
מכאן, a ניתן להצגה ע"י צ"ל של איברי $A \setminus \{a\} \Leftarrow A$ היא ת"ל.
זו סתירה לנתון ולכן $b \notin A \setminus \{a\}$ וגם $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ בת"ל.

הגדרה:

יהא V מ"ו, $B \subseteq V$. B נקרא "בסיס עבור V" אם מתקיים:
(א) B בת"ל, (ב) B פורשת (את V) $\rightarrow span(B)=V$

הגדרה:

יהא V מ"ו. המימד של V מסומן ב-$\dim V$ והוא מספר האיברים בבסיס כלשהו של V.

דוגמאות:

(1) $B=\{1,x,x^2\}$ הוא בסיס ל-$\mathbb{R}_2[x]$! $\dim(\mathbb{R}_2[x])=3$
זהו הבסיס הסטנדרטי של מרחב הפולינומים ממעלה 2.

$A=\{(2,3),(5,7)\}$ בת״ל. יש 2 שיטות להוכיח שקבוצת וקטורים הינה בת״ל.

שיטה 1: א. בונים את המטריצה ששורותיה הם הוקטורים הנתונים.
ב. מדרגים את המטריצה.
ג. רק השורות השונות מ-0 של המטריצה המדורגת הם בת״ל.
(אם בתהליך הדרוג עושים החלפת שורות, אזי לוקחים את השורות המקוריות השונות מ-0)

שיטה 2: א. בונים מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים הנתונים.
ב. מדרגים את המטריצה.
ג. רק העמודות שיש בהן ציר במטריצה המדורגת הם בת״ל.

נשתמש באלגוריתם 2 כדי לבדוק ש-A בת״ל:

$$\begin{pmatrix}2&5\\3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{R_1}{2}\to R_1}\begin{pmatrix}1&2.5\\3&7\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&2.5\\0&-0.5\end{pmatrix}$$

(הצירים מוקפים בעיגול)

יש צירים בעמודות 1,2 ולכן הוקטורים בעמודות אלה הם בת״ל, ולכן A בת״ל.
(ציר = האיבר הראשון בשורה ששונה מ-0).

כעת נבדוק ש- $B=\{(1,3),(2,5),(8,6)\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.
אנו צריכים להראות שלכל $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש:

$$\alpha_1(1,3)+\alpha_2(2,5)+\alpha_3(8,6)=(a,b)$$
$$\Downarrow$$
$$(\alpha_1,3\alpha_1)+(2\alpha_2,5\alpha_2)+(8\alpha_3,6\alpha_3)=(a,b)$$
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+8\alpha_3=a\\3\alpha_1+5\alpha_2+6\alpha_3=b\end{cases}\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&8&a\\3&5&6&b\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&8&a\\0&-1&-18&b-3a\end{array}\right)$$

נדרג את המטריצה ונמצא פתרונות.

$$\xrightarrow{-R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&8&a\\0&1&18&3a-b\end{array}\right)$$

נסמן $\boxed{\alpha_3=t}$ ולפי המטריצה:

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+8\alpha_3=a\\\alpha_2+18\alpha_3=3a-b\end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\alpha_2=3a-b-18t}$$

$$\alpha_1=a-8t-2(3a-b-18t)=$$
$$=a-8t-6a+2b+36t=$$
$$=-5a+2b+28t$$
$$\Downarrow$$

קיבלנו אינסוף פתרונות והפתרון הכללי הוא: $\{(-5a+2b+28t,\ 3a-b-18t,\ t)\mid t\in\mathbb{R}\}$

ז״א בהינתן (a,b) ניתן להציג אותו כצירוף ליניארי של הוקטורים ב-B כך.

② $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ ולכן $\dim\mathbb{R}^3=3$

באופן כללי: $\dim\mathbb{R}^n=n$, $\dim\mathbb{R}_n[x]=n+1$, $\dim\mathbb{F}^{m\times n}=m\cdot n$

<u>תרגיל:</u>

הראו שהקבוצה הבאה היא בת"ל והשלימו אותה לבסיס של $\mathbb{R}^3$:

$$B=\{(1,2,3),(2,4,5)\}$$

פתרון:

נבצע בדיקת הבת"ל (וההשלמה) נדרג את המטריצה המתאימה:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

רואים שהם בת"ל (כי אין שורת אפסים). כמו כן רואים שבעמודה השניה אין איבר מוביל ולכן נוסיף את הוקטור $(0,1,0)$ ל-B ונקבל בסיס.

<u>תרגיל 7.11</u> (עמ' 41)

יהיו $U,V\in\mathbb{R}_3[x]$ התת-מרחבים הבאים:

$$U=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\ :\ p(0)=p(1)=0\},\quad V=\text{span}\{x^2-x,\ 1+x\}$$

א) מצאו בסיס ל-$\text{Span}(U\cup V)$; מהו המימד?

ב) הוכיחו ש-$U\cup V$ אינו תמ"ו של $\mathbb{R}_3[x]$.

פתרון:

א) הוכחנו בשיעורי הבית ש-$\text{Span}(U\cup V)=\text{span}\,U+\text{Span}\,V$. את $\text{Span}\,V$ כבר יש לנו ולכן נשאר למצוא את $\text{Span}\,U$.

<u>הערה:</u> אם t הוא שורש של הפולינום $p(x)$ (כלומר: $p(t)=0$) אזי $(x-t)$ מחלק את $p(x)$ ולכן $p(x)=(x-t)g(x)$ (כאשר $\deg(g(x))=\deg(p(x))-1$).

לכן אצלנו, הפולינום הכללי ב-U הוא מהצורה $\underset{(x-0)}{x}\cdot(x-1)\cdot(ax+b)$.

$$U=\{x(x-1)(ax+b):a,b\in\mathbb{R}\}=\{a\underline{x^2(x-1)}+b\underline{x(x-1)}\mid a,b\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\text{Span}\{x^3-x^2,\ x^2-x\}$$

$$\text{span}(U\cup V)=\text{span}\{x^2-x,\ 1+x\}+\text{span}\{x^3-x^2,\ x^2-x\}=$$
$$=\text{span}\{1+x,\ x^2-x,\ x^3-x^2\}$$

נבדוק האם שלושת הוקטורים הללו הם בת"ל:

$$\alpha(1+x)+\beta(x^2-x)+\gamma(x^3-x^2)=0 \Rightarrow$$

$$\gamma\cdot x^3+(\beta-\gamma)x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

(כדי שפולינום זה יהיה אפס זהותית, כל המקדמים צריכים להתאפס)

הם בת"ל ולכן הם הבסיס ל- $Span(U\cup V)$ ולכן $\dim Span(U\cup V)=3$.

ב) $U\cup V$ תמ"ו $\Leftrightarrow$ $U\subseteq V$ או $V\subseteq U$. אז נראה שאין הכלות כאלה:

$U\nsubseteq V$ כי: $x^3,x^2\in U$ וקל לראות ש- $x^3,x^2\notin V$. (כי לא ניתן להגיע ל-x^3 מתוך $1+x,\ x^2-x$ של-V).

$V\nsubseteq U$ כי: $1+x\in V$ וקל לראות ש- $1+x\notin U$ (כי לא מתאפס ב-0 אלא ב-1-)

תרגיל 7.18 (עמ' 42)

יהי V מ"ו ממימד 3 ויהיו $v_1,v_2,v_3\in V$ המקיימים $v_1+v_2+v_3=0$.

האם השוויון $span\{v_1\}+span\{v_2\}+span\{v_3\}=V$ נכון תמיד, לפעמים או לעולם לא?

פתרון: לעולם לא, כי: $v_1=-v_2-v_3$

$$span\{v_1\}+span\{v_2\}+span\{v_3\} \underset{\substack{\downarrow \\ Span(A\cup B)=Span(A)+span(B)}}{=} span\{v_1,v_2,v_3\} \overset{\uparrow}{=} span\{v_2,v_3\} \overset{?}{=} V$$

והאיחוד שהם לא יכולים להיות: V- ממימד 3 ולכן צריך, מינימום 3 וקטורים בת"ל על מנת לפרוש אותו.

תרגיל 7.30 (עמ' 44)

עבור מטריצה קבועה $B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ נגדיר $V_B=\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}\mid AB=BA\}$.

מהוכחה ש-V_B אכן תמ"ו (בדקו זאת בבית!):

א) יהיו $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. מצאו בסיס ומימד עבור

V_B, V_C, $V_B\cap V_C$, V_B+V_C

ב) השלימו כל אחד מהבסיסים הנ"ל לבסיס עבור $\mathbb{R}^{2\times2}$.

פתרון:

א) V_B: ננסה לפענח את האיבר הכללי. יהי $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$. $A\in V_B \Leftarrow$

$$AB=BA \Rightarrow \overset{A}{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}}\overset{B}{\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}}=\overset{B}{\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}}\overset{A}{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix}2a+b&0\\2c+d&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&2b\\a&b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b=0 \ ,\ a=2c+d \Rightarrow A=\begin{pmatrix}2c+d&0\\c&d\end{pmatrix}$$

$$V_B=\left\{\begin{pmatrix}2c+d&0\\c&d\end{pmatrix}\middle| c,d\in\mathbb{R}\right\}=\left\{c\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\middle| c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$V_B = span\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

ניתן לראות ששתי המטריצות הן בת"ל ולכן זהו הבסיס. $\dim V_B = 2$.

באופן דומה נקבל את: $V_C = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim V_C = 2$.

$\underline{V_C \cap V_B}$: נמצא שני איברים כלליים ונשווה אותם:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = a \\ \alpha = 0 \\ \beta = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = a \\ \beta = b \end{cases} \rightarrow a = b$$

כך שהאיבר הכללי בחיתוך הוא מהצורה $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$V_C \cap V_B = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim V_C \cap V_B = 1$$

$\underline{V_C + V_B}$:

משפט: $span(A) + span(B) = span(A \cup B)$

$$V_C + V_B = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} + span\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבדוק תלות ליניארית בין 4 המטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$V_C + V_B = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim(V_C + V_B) = 3$$

ג) נשלים לדוגמה את הבסיס של V_B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \overset{\text{ציר}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\text{ציר}}{-1} & 2 \end{pmatrix}$$

רואים שהעמודות החופשיות הן 2, 4 ולכן נוסיף את: $(0,1,0,0)$, $(0,0,0,1)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב שורה / מרחב עמודה

<u>הגדרה:</u> מרחב השורות של מטריצה A הוא המרחב הנפרש ע"י שורותיה. כלומר $R(A)=\text{span}\{R_i(A)\}$

באופן דומה, מרחב העמודות: $C(A)=\text{span}\{C_i(A)\}$.

<u>תרגיל:</u>

מצאו בסיס ומימד למרחב השורות ולמרחב העמודות של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&5\\3&2&0&1&2\\1&2&0&0&10\end{pmatrix}$$

פתרון:

בעקרון מתקיים: $R(A)=\text{span}\{(1,2,0,0,5),(3,2,0,1,2),(1,2,0,0,10)\}$

$C(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\\10\end{pmatrix}\right\}$

אך, כדי למצוא את הבסיס עלינו לדרג את המטריצה ולבחור את השורות/עמודות בת"ל.

$$A\xrightarrow{\text{לאחר דירוג}}\begin{pmatrix}1&2&0&0&5\\0&-4&0&1&-13\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$$

שלושת השורות הן בת"ל ולכן הן הבסיס.

העמודות הבת"ל הן אלה שיש בהן איבר מוביל, כלומר I,II,V.

לכן הבסיס למרחב העמודות הוא: $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\\10\end{pmatrix}\right\}$

ומתקיים $\dim R(A)=\dim C(A)=3$.

<u>תרגיל מתכונת</u> (הבחנה: אחרת) (אפשר לדלג אם אין זמן)

אם $Ax=b$, $A\in \mathbb{F}^{m\times n}$ קיים פתרון לכל $b\in\mathbb{F}^m$ אזי $m\le n$.

פתרון:

$Ax=\sum_{i=1}^{n}x_i C_i(A)$. אם לכל b יש פתרון אזי b הוא צ"ל של עמודות A $\Leftarrow$ $C(A)=\text{span}\{C_i(A)\}=\mathbb{F}^m$ $\Leftarrow$ $\dim C(A)=m$

$\Leftarrow$ יש ב-A בדיוק m עמודות בת"ל ויש סה"כ n עמודות

ולכן $m\le n$.

~~[illegible]~~

IBM
תאריך 16-12-2010

<u>הגדרה</u>: דרגת העמודות/השורות של A = מימד מרחב העמודות | השורות של A.

$\dim C(A)$ | $\dim R(A)$

<u>תרגיל</u> 111 (עמ' 48)

מצאו את דרגת השורות ואת דרגת העמודות של המטריצה A מעל $\mathbb{R}$: $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>:

נדרג את המטריצה ← $A\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\end{pmatrix}$

שתי השורות הן בת"ל ולכן דרגת השורות היא 2.

עכשיו נמצא את דרגת העמודות, נדרג את A^t:

$$A^t=\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5\\0&-4\\0&-8\\0&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&5\\0&-4\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ורואים שדרגת העמודות היא 2. כלומר, כאן:

$R(A)=Sp\{(1,2,3,4),(5,6,7,8)\}$

$C(A)=Sp\{(1,5),(2,6)\}$

שימו ♡ שדרגת העמודות = דרגת השורות = 2. אין זה מקרי:

משפט:

דרגת השורות של מטריצה שווה לדרגת העמודות שלה.

הסימון לדרגה של A: $\mathrm{rank}(A)$. (= מס' השורות השונות מ-0 במטריצה המדורגת)

$$\mathrm{rank}(A)=\dim C(A)=\dim R(A)$$