מד"ר - הרצאה 7

23 באוגוסט 2011

מערכות מד"ר מסדר ראשון לינאריות עם מקדמים קבועים לא הומוגניות

$$y_i^{'} = \sum_j a_{ij} y_j + g_i(x)$$

או

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^{'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

נסמן

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נניח M ניתנת ללכסון, כלומר קיימת P כך ש $P^{-1}MP = D$ אלכסונית.
נגדיר

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y} &= P \cdot \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{z} &= P^{-1}\overrightarrow{y} \end{aligned}$$

המשוואה

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y}^{'} &= M\overrightarrow{y} + \overrightarrow{g}(x) \\ P\overrightarrow{z}^{'} &= MP\overrightarrow{z} + \overrightarrow{g}(x) \\ P^{-1}P\overrightarrow{z} &= P^{-1}MP\overrightarrow{z} + P^{-1}\overrightarrow{g}(x) \\ \overrightarrow{z} &= D\overrightarrow{z} + P^{-1}\overrightarrow{g}(x) \end{aligned}$$

דוגמה

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y + e^{t} \\ \dot{y} &= x - y - e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(-1-\lambda) &= 1 \\ (1-\lambda)(1+\lambda) &= -1 \\ \lambda^2 &= 2 \\ \lambda &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

נמצא וקטורים עצמיים:

$$\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & 1\\ 1 & -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

לכן עבור $\lambda_1=\sqrt{2}$ נקבל

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}$$

נמצא עבור $\lambda_2=-\sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix}1+\sqrt{2} & 1\\ 1 & -1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

אז עבור λ_2 הוקטור העצמי הוא

$$v_2=\begin{pmatrix}1\\ -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

אז

$$\begin{aligned}P &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ \sqrt{2}-1 & -1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\\ D &= P^{-1}MP=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נסמן (כי זה יוצא מגעיל):

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

ואז נקבל:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \sqrt{2}z_1+ae^t+be^{-t}\\ \dot{z}_2 &= -\sqrt{2}z_2+ce^t+de^{-t}\end{aligned}$$

ואת זה לא קשה לפתור, כל משוואה בפני עצמה.

בעיות שפה

בעיה התחלתית (קושי)

לדוגמה:

$$\begin{aligned}y^{''}+y &= 0\\ y(0) &= 1\\ y^{'}(0) &= -1\end{aligned}$$

נפתור ונקבל

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$

מהתנאים נקבל

$$\begin{aligned}c_1 &= 1\\ c_2 &= -1\end{aligned}$$

וקיבלנו פתרון אחד ויחיד

$$y(x)=\cos x-\sin x$$

בעית שפה

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -1 \end{aligned}$$

(יש לנו תנאים על הפונקציה בשתי נקודות, לא תנאים על הפונקציה והנגזרת באותה נק').
הפתרון הכללי לא השתנה:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

נציב את תנאי השפה ונקבל למעשה את אותו הפתרון:

$$y(x) = \cos x - \sin x$$

אם נשנה את תנאי הזשפה:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(\pi) &= 1 \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ y(\pi) &= 1 \Rightarrow c_1 = -1 \end{aligned}$$

לכן אין פתרון.
נשנה את תנאי השפה שוב:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(\pi) &= -1 \end{aligned}$$

אז:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ y(\pi) &= -1 \Rightarrow c_1 = 1 \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad y(x) = \cos x + c \cdot \sin x$$

לכן כמו שאנחנו רואים, לבעיות שפה לא בהכרח יש פתרון, ואם יש הוא לא בהכרח יחיד, לעומת בעיות קושי.

מרחבי מכפלה פנימית של פונקציות

נגדיר מכפלה פנימית בין פונק' (בקטע $(a,\, b)$) בצורה הבאה:

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} \langle f,\, f\rangle &\geq 0 \\ \langle f,\, f\rangle = 0 &\iff f \equiv 0 \underset{\text{(almost everywhere)}}{a.e} \end{aligned}$$

($a.e$ הכוונה פרט אולי למספר בן מניה של נק').
הנורמה היא

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,\, f\rangle}$$

סדרת הפונק' $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ נקראת אורתוגונלית אם לכל $n \neq m$:

$$\langle f_n(x)\,,\, f_m(x)\rangle = 0$$

הסדרה תקרא אורתונורמלית אם היא אורתוגונלית וכן לכל n מתקיים

$$\langle f_n(x)\,,\, f_n(x)\rangle = 1$$

בעיית שטורם ליוביל

המד"ר:

$$-\left(P\left(x\right)y^{'}\right)^{'}+Q\left(x\right)y=f\left(x\right)$$

אם $P,\,Q$ רציפות וגזירות בקטע $\left(a,\,b\right)$ וכן $P\left(x\right)>0$ בקטע, המד"ר נקרא משוואת שטורם ליוביל.
ניתן לרשום את המשוואה בצורה אחרת:

$$-P^{'}\left(x\right)y^{'}-P\left(x\right)y^{''}+Q\left(x\right)y=f\left(x\right)$$

דוגמה

משוואת לג'נדר:

$$\left(1-x^{2}\right)y^{''}-2xy^{'}+6y=0$$

בקטע $\left(-1,\,1\right)$.

תכונות של הבעיה

נתבונן בחלק הראשון:

$$-\frac{d}{dx}\left(P\left(x\right)y^{'}\right)$$

נפעיל $\int_{a}^{b}y$:

$$\begin{aligned}
-\int_{a}^{b}y\cdot\frac{d}{dx}\left(P\left(x\right)y^{'}\right)dx & = & -yP\left(x\right)y^{'}|_{a}^{b}+\int_{a}^{b}\left(\frac{d}{dx}y\right)P\left(x\right)y^{'}dx\\
 & = & -yP\left(x\right)y^{'}|_{a}^{b}+\int P\left(x\right)\left(y^{'}\right)^{2}dx
\end{aligned}$$

נקבע תנאי שפה:

$$y\left(a\right)=y\left(b\right)=0$$

או

$$y^{'}\left(a\right)=y^{'}\left(b\right)=0$$

אז נקבל:

$$\int_{a}^{b}P\left(x\right)\left(y^{'}\right)^{2}dx>0$$

לכן האופרטור

$$-\frac{d}{dx}\left(P\frac{d}{dx}\right)$$

הוא אופרטור חיובי.

הערה

בהינתן המד"ר

$$R\left(x\right)y^{''}+S\left(x\right)y^{'}+T\left(x\right)y=f\left(x\right)$$

ניתן להפוך אותו לצורה של שטורם ליוביל ע"י כפל בגורם אינטגרציה:

$$\begin{aligned}
\mu(x) R(x) y^{''} + \mu(x) S(x) y^{'} + \mu(x) T(x) y &= \mu(x) f(x) \\
[\mu(x) R(x)]^{'} &= \mu(x) S(x) \\
\mu^{'}(x) R(x) + \mu(x) R^{'}(x) &= \mu(x) S(x) \\
\frac{\mu^{'}(x)}{\mu(x)} &= \frac{S(x) - R^{'}(x)}{R(x)} \\
\mu &= c \cdot e^{\int \frac{S(x)-R^{'}(x)}{R(x)} dx}
\end{aligned}$$

ואז

$$\left(\mu(x) R(x) y^{'}\right)^{'} + \mu(x) T(x) = \mu(x) f(x)$$

אופרטורים לינאריים

כמו שהגדרנו בלינארית מכפלה פנימית בוקטורים כך:

$$\langle u, v\rangle = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \sum_i v_i \bar{u}_i$$

ואופרטור לינארי:

$$A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$$

אז עבור פונקציות:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx$$

ואופרטור לינארי L, כלומר

$$L(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda L(f(x)) + \mu L(g(x))$$

דוגמאות לאופרטורים לינארים

.1

$$Lf(x) = P(x) f(x)$$

.2

$$Lf(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

.3

$$Lf(x) = \int_a^b P(x, t) f(t) dt$$

נשים לב לדמיון בין האופרטור הזה לבין

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j = u_i$$

אופרטור חיובי לחלוטין

אופרטור על וקטורים נקרא חיובי לחלוטין אם

$$\forall\vec{v}\quad \vec{v}^{\,t}A\vec{v}>0$$

אופרטור על פונקציות נקרא חיובי לחלוטין אם

$$\forall f\left(x\right)\quad\int f\left(x\right)Lf\left(x\right)dx>0$$

כלומר

$$\left\langle f,\,Lf\right\rangle >0$$

משוואת ע"ע

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

דוגמה

$$-y^{''}=\lambda y$$

זו בעיית שטורם ליוביל, עם

$$P\left(x\right)=1$$

אופרטור שטורם ליוביל הוא חיובי לכן אנו מצפים ש$\lambda>0$.
נוסיף תנאי שפה שטורם-ליוביל:

$$\begin{aligned}y\left(0\right) & = & 0\\ y\left(\pi\right) & = & 0\end{aligned}$$

אז עבור $\lambda>0$:

$$y=c_{1}\cos\sqrt{\lambda}x+c_{2}\sin\sqrt{\lambda}x$$

עבור $\lambda<0$:

$$y=c_{1}e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_{2}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

עבור $\lambda=0$:

$$y=c_{1}+c_{2}x$$

נציב את תנאי השפה. תחילה עבור $\lambda=0$, נקבל

$$y\equiv0$$

וזה לא מעניין אותנו כי יוצא שהוקטור העצמי הוא 0.
עבור $\lambda<0$:

$$\begin{aligned}y & = & c_{1}e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_{2}e^{-\sqrt{-\lambda}x}\\ c_{1} & = & -c_{2}\\ c_{1} & = & 0\end{aligned}$$

אז יוצא לנו

$$y\equiv0$$

ושוב, זה נפסל כי הוקטור העצמי הוא 0.
עבור $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\ y(0) = 0 &\Rightarrow c_1 = 0 \\ y(\pi) = 0 &\Rightarrow c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \end{aligned}$$

ואז

$$c_2 = 0 \text{ or } \sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z}$$

ו$c_2 = 0$ נפסל כי אז מקבלים $y \equiv 0$.
לכן, הע"ע של האופרטור $-\frac{d^2}{dx^2}$ עם תנאי השפה $y(0) = y(\pi) = 0$ הם:

$$\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$$

כלומר

$$\lambda = n^2$$

עבור $n \in \mathbb{N}$.
הוקטורים העצמיים שלו הם

$$y = \sin(nx)$$

כאשר $\lambda = n^2$.

פתרון משוואה לינארית במרחב וקטורים

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

פונקציית הדלתא של דיראק Dirac delta function

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

ולכל $f(x)$ רציף ב0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

(זו לא בדיוק פונקציה, זה נקרא פונקציה מוכללת - generalised function theory).
עבור אופרטור L, נתבונן במשוואה:

$$L(g(x, x_0)) = \delta(x - x_0)$$

כאשר $g(x, x_0)$, הפתרון של המשוואה, נקראת פונק' גרין (Green's function).
עבור המד"ר

$$Ly = f(x)$$

נציב

$$y = \int g(x, x_0) f(x_0)\, dx_0$$

אזי:

$$\begin{aligned}
Ly &= L\int g\left(x,\,x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)dx_{0}\\
&= \int Lg\left(x,\,x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)dx_{0}\\
&= \int \delta\left(x-x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)dx_{0}\\
&= f\left(x\right)
\end{aligned}$$

נשים לב שיש לנו אנלוגיה בין I במשוואות לינאריות בוקטורים לבין $\delta\left(x-x_{0}\right)$ במשוואות $Ly=f\left(x\right)$:

$$\begin{aligned}
Ly &= f\\
y &= Gf
\end{aligned}$$

כאשר G אופרטור גרין:

$$Gf:=\int g\left(x,\,x_{0}\right)f\left(x_{0}\right)dx_{0}$$

דוגמה

$$\begin{aligned}
Lu &= u^{''}+u\\
u\left(0\right) &= 0\\
u\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

נמצא את פונק' גרין:

$$\begin{aligned}
g^{''}+g &= \delta\left(x-x_{0}\right)\\
\int_{x_{0}-\epsilon}^{x_{0}+\epsilon}g^{''}+gdx &= \int_{x_{0}-\epsilon}^{x_{0}+\epsilon}\delta\left(x-x_{0}\right)=1\\
g^{'}|_{x_{0}-\epsilon}^{x_{0}+\epsilon}+0 &= 1\\
g^{'}\left(x_{0}+\epsilon\right)-g^{'}\left(x_{0}-\epsilon\right) &= 1
\end{aligned}$$

עבור $x<x_{0}$:

$$\begin{aligned}
y^{''}+y &= 0\\
y &= c_{1}\cos x+c_{2}\sin x\\
y\left(0\right) &= 0\\
y_{I} &= c_{2}\sin x
\end{aligned}$$

עבור $x>x_{0}$:

$$\begin{aligned}
y^{''}+y &= 0\\
y &= c_{3}\cos x+c_{4}\sin x\\
y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0\\
c_{4} &= 0\\
y_{II} &= c_{3}\cos x
\end{aligned}$$

אנו דורשים שיתקיים:

$$\begin{aligned}
y_{I}\left(x_{0}\right) &= y_{II}\left(x_{0}\right)\\
1+y_{I}^{'}\left(x_{0}\right) &= y_{II}^{'}\left(x_{0}\right)
\end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{aligned} c_2 \sin x_0 &= c_3 \cos x_0 \\ 1 + c_2 \cos x_0 &= -c_3 \sin x_0 \end{aligned}$$

נפתור:

$$\begin{aligned} 1 + c_2 \cos x_0 &= -\frac{c_2 \sin x_0}{\cos x_0} \sin x_0 \\ \cos x_0 + c_2 \cos^2 x_0 &= -c_2 \sin^2 x_0 \\ c_2 &= -\cos x_0 \\ c_3 &= -\sin x_0 \end{aligned}$$

אזי:

$$g\left(x,\, x_0\right) = \begin{cases} -\cos x_0 \sin x & x < x_0 \\ -\sin x_0 \cos x & x > x_0 \end{cases}$$

שימוש בפונק׳ גרין

אם נקבל מד"ר

$$u'' + u = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

אז:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(x,\, x_0\right) f\left(x_0\right) dx_0 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(x,\, x_0\right) \cdot x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) dx_0 \\ &= \int_0^{x} \left(-\sin x_0 \cos x\right) \cdot x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) dx_0 \\ &= \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos x_0 \sin x\right) x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) dx_0 \end{aligned}$$

הערה

אם אוסף הו"ע של אופרטור מהווה בסיס למרחב הפונק׳ $L\psi_n = \lambda_n \psi_n$ ומתקיים:

$$\delta\left(x - x_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n\left(x\right) \psi_n\left(x_0\right)$$

אזי:

$$g\left(x,\, x_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n\left(x\right) \psi_n\left(x_0\right)}{\lambda_n}$$

המשך ההוכחה היה מד"ח - לא למבחן