פתרון תרגיל 3

1. א. נפתור את המשוואה $z^n=1$. מתקיים $(cis(\theta))^n = cis(n\theta)=1$ אז"ז $n\theta = 2\pi k$ עבור $0 \le k < n$ ולכן הפתרונות הם $z_k = cis(\frac{2\pi k}{n})$ עבור $0 \le k < n$. z_1 מקיים את הדרוש (מדוע?).

ב. שימו לב: $z_1 \ne 1$ ולכן קיבלנו סידרה הנדסית $1 \ne q = z_1$. נשתמש בנוסחה עבור סידרה הנדסית ונקבל: $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = 0$.

2. מתקיים $z^4 = -2-2\sqrt{3}\cdot i$. נעביר את $-2-2\sqrt{3}\cdot i$ להצגה קוטבית: $-2-2\sqrt{3}\cdot i = 4e^{\frac{4\pi i}{3}}$ (שימו לב שיש להוסיף π לזוית, שכן המספר נמצא ברביע השלישי). לפי נוסחת השורשים מתקיים: $z=\sqrt{2}e^{\left(\frac{\frac{4\pi i}{3}+2\pi k}{4}\right)}$ ולכן ארבעת השורשים הם: $\sqrt{2}e^{\frac{-\pi i}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{6}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{3}}$.

3. מחד, מתקיים:

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)
\end{aligned}
$$

מאידך, עפ"י משפט דה – מואבר מתקיים:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

לאחר השוואת החלקים המדומים מקבלים: $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$, כנדרש.

4.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1+i & 2 \\ -i & 1 & 0 & 2 \\ 1+i & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
\xrightarrow[R_3+R_2-R_1\to R_3]{R_2+iR_1\to R_2}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1+i & 2 \\ 0 & 0 & -1+i & 2+2i \\ 0 & 1-i & -i & 2 \end{array}\right)
\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1+i & 2 \\ 0 & 1-i & -i & 2 \\ 0 & 0 & -1+i & 2+2i \end{array}\right)
$$

ולכן קיים פתרון $z = \frac{2+2i}{-1+i} = \frac{2(1+i)(-1-i)}{-2} = (1+i)^2 = 2i$ נציב במשוואה השנייה לקבל $(1-i)y+2=2 \Leftarrow y=0$. כעת, נציב במשוואה הראשונה $x+2i-2=2 \Leftarrow x=4-2i$.

בסה"כ קיבלנו $x=2, y=0, z=2i$.

.5

$$\begin{pmatrix}4&0&1&5\\1&2&2&1\\0&3&6&3\\2&1&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[2R_2-R_1\to R_2]{\frac{1}{3}R_3\to R_3}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&1&2&1\\2&1&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2R_4-R_1\to R_4}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&1&2&1\\0&2&7&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4-2R_3\to R_4}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&1&2&1\\0&0&3&-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&0&6&1\\0&0&3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{2R_4-R_3\to R_4}\begin{pmatrix}4&0&1&5\\0&3&0&2\\0&0&6&1\\0&0&0&-15\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{15}R_4\to R_4]{6R_1-R_3\to R_1}\begin{pmatrix}24&0&0&29\\0&3&0&2\\0&0&6&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2-2R_4\to R_2\\R_3-R_4\to R_3}]{R_1-29R_4\to R_1}\begin{pmatrix}24&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}R_2\to R_2\\\frac{1}{6}R_3\to R_3}]{\frac{1}{24}R_1\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

<u>פתרון</u>

$$\begin{cases}x_1+(a-1)x_2-x_3=4\\ax_1+(a-1)x_2-x_3=a+3\\x_1+(a-1)x_2+(a-3)x_3=7\end{cases}\xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-aR_1\to R_2}\begin{cases}x_1+(a-1)x_2-x_3=4\\0x_1+(1-a)(a-1)x_2+(a-1)x_3=-3(a-1)\\0x_1+0x_2+(a-2)x_3=3\end{cases}$$

פתרון יחיד: $a\neq 1,2$.

אין פתרון: כש $a=2$ נקבל מהמשוואה השלישית סתירה ($x_1+0x_2+0x_3=3$) ולכן במצב זה אין פתרון.

אינסוף פתרונות: $a=1$ נקבל מערכת $\begin{cases}x_1+0x_2-x_3=4\\0x_1+0x_2+0x_3=0\\0x_1+0x_2+-x_3=3\end{cases}$ או אם נחליף את השורות השנייה והשלישית לקבלת צורה מדורגת $\begin{cases}x_1+0x_2-x_3=4\\0x_1+0x_2+-x_3=3\\0x_1+0x_2+0x_3=0\end{cases}$ וברור שישנם אינסוף פתרונות. המשתנה החופשי הוא x_2 כי x_1 ו- x_3 משתנים מובילים (בצורה המדורגת הם המשתנים הראשונים בשורות הראשונה והשנייה כך שהמקדמים שלהם אינם אפסים) אם נציב $x_2=t$ נקבל שאוסף הפתרונות הוא מהצורה $\{(1,t,-3)\,|\,t\in R\}$.

7.

א. נתון ש- $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ הוא פתרון של המערכת $\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\dots+\alpha_{1n}x_n=0\\ \alpha_{21}x_1+\dots+\alpha_{2n}x_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}x_1+\dots+\alpha_{mn}x_n=0\end{cases}$, ולכן

מתקיים $\begin{cases}\alpha_{11}\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\gamma_n=0\\ \alpha_{21}\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\gamma_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\gamma_n=0\end{cases}$. נכפול את כל השוויונות בסקלר λ ונקבל:

$\begin{cases}\alpha_{11}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\cdot\lambda\gamma_n=0\\ \alpha_{21}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\cdot\lambda\gamma_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\cdot\lambda\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\cdot\lambda\gamma_n=0\end{cases}$. אולם פירושם של השיוויונות הללו הוא שה-n-יה

$\lambda c=(\lambda\gamma_1,\dots,\lambda\gamma_n)$ פותרת את המערכת.

ב. יהיו $c=(\gamma_1,\dots,\gamma_n),d=(\delta_1,\dots,\delta_n)$ שני פתרונות של המערכת הנתונה ולכן

מתקיימים השוויונות: $\begin{cases}\alpha_{11}\gamma_1+\dots+\alpha_{1n}\gamma_n=0\\ \alpha_{21}\gamma_1+\dots+\alpha_{2n}\gamma_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\gamma_1+\dots+\alpha_{mn}\gamma_n=0\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha_{11}\delta_1+\dots+\alpha_{1n}\delta_n=0\\ \alpha_{21}\delta_1+\dots+\alpha_{2n}\delta_n=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\delta_1+\dots+\alpha_{mn}\delta_n=0\end{cases}$. נחבר את

שתי המערכות ונקבל: $\begin{cases}\alpha_{11}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{1n}(\delta_n+\gamma_n)=0\\ \alpha_{21}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{2n}(\delta_n+\gamma_n)=0\\ \vdots\\ \alpha_{m1}(\delta_1+\gamma_1)+\dots+\alpha_{mn}(\delta_n+\gamma_n)=0\end{cases}$.

כלומר, ה-n-יה $c+d=(\gamma_1+\delta_1,\dots,\gamma_n+\delta_n)$ פותרת את המערכת.

ג. אם c,d הם פתרונות של המערכת אזי $\lambda_1 c,\lambda_2 d$ הם גם פתרונות על פי א'. אבל אז, על פי ב', גם $\lambda_1 c+\lambda_2 d$ הוא פתרון של המערכת.

ד. התכונות הללו הן נחלתן של המערכות ההומוגניות. על מנת להראות שאינן מתקיימות במערכות לא הומוגניות, מספיק להביא דוגמא נגדית:

$(1,4),(2,3)$ שניהם פתרונות של $x+y=5$ אבל $(1,4)+(2,3)=(3,7)$ אינו פתרון של המשוואה כי $3+7=10\neq 5$.

$(1,4)$ פתרון של $x+y=5$ כאמור אבל $2\cdot(1,4)=(2,8)$ אינו פתרון של משוואה זו.

8. <u>א.</u>

נניח שהכפל באגף שמאל מוגדר ונוכיח שהכפל באגף ימין מוגדר.

החיבור $B+C$ מוגדר ז"א המטריצות B,C מאותו סדר.

נניח ש $B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ואז $B+C\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

הכפל באגף שמאל מוגדר ולכן מספר העמודות במטריצה $B+C$ שווה למספר השורות במטריצה A ז"א $A\in\mathbb{F}^{n\times l}$. נקבל ש $(B+C)A\in\mathbb{F}^{m\times l}$.

נראה שהכפל באגף ימין מוגדר.

מכיוון ש $B\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $A\in\mathbb{F}^{n\times l}$ נקבל שמספר העמודות במטריצה B שווה למספר השורות במטריצה A ולכן הכפל BA מוגדר ו $BA\in\mathbb{F}^{m\times l}$.

באותו אופן הכפל CA מוגדר ו $CA\in\mathbb{F}^{m\times l}$.

קיבלנו שהמטריצות BA,CA מאותו סדר ולכן החיבור מוגדר ומתקיים $BA+CA\in\mathbb{F}^{m\times l}$.

המטריצות $BA+CA$, $(B+C)A$ מאותו סדר.

נראה ש $(B+C)A=BA+CA$.

נסמן $D=B+C$. $d_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$.

נסמן $E=DA$ מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}d_{ik}e_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}+c_{ik})e_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\left(b_{ik}e_{kj}+c_{ik}e_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}e_{kj}+\sum_{k=1}^{n}c_{ik}e_{kj}.$$

נסמן $F=BA$ ומהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $f_{ij}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}$.

נסמן $G=CA$ ומהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $g_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}a_{kj}$.

סה"כ קיבלנו ש $e_{ij}=f_{ij}+g_{ij}$ ולכן מתקיים השוויון $(B+C)A=BA+CA$.

ב.

מכיוון שהכפל AB וכפל בסקלר לא משנה את סדר המטריצה נקבל שגם הכפל $(\alpha A)B, A(\alpha B)$ מוגדר והסדר של המטריצות $(\alpha A)B, A(\alpha B), \alpha(AB)$ זהה.

נסמן $C=AB$ מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

מהגדרת כפל בסקלר נקבל ש $\alpha c_{ij}=\alpha\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\alpha\left(a_{ik}b_{kj}\right)$ הוא הרכיב בעמודה ה j בשורה ה i של המטריצה $\alpha\left(AB\right)$.

מהגדרת כפל בסקלר נקבל ש αa_{ij} הוא הרכיב בעמודה ה j בשורה ה i של המטריצה αA.

נסמן $D=\left(\alpha A\right)B$ מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha a_{ik}\right)b_{kj}$.

מהגדרת כפל בסקלר נקבל ש αb_{ij} הוא הרכיב בעמודה ה j בשורה ה i של המטריצה αB.

נסמן $E=A\left(\alpha B\right)$. מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\alpha b_{kj}\right)$.

מאסוציאטיביות חילוף בשדה נקבל ש $e_{ij}=\alpha a_{ij}=d_{ij}$.

ג.

נסמן $C=AO$ מהגדרת כפל מטריצות נקבל ש $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}o_{kj}$. במטריצת האפס כל הרכיבים הם אפסים ולכן $o_{kj}=0$ לכל $1\le j\le m, 1\le k\le n$ ולכן $a_{ik}o_{kj}=0$ לכל $1\le j\le m, 1\le k\le n$

ואז הסכום $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}o_{kj}$ שווה לאפס ולכן c_{ij} וקיבלנו את מטריצת האפס כדרוש.

באותו אופן ניתן להראות ש $0A=0$.

9. <u>פתרון</u>

א. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&6\end{pmatrix}.$

ב. מס' העמודות בשמאלית -2, מס' השורות בימנית – 3 לכן הכפל לא מוגדר.

ג. $\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3\end{pmatrix}$

10. א.

$$EF=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}$$

$$FE=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b+ac&c&1\end{pmatrix}$$

אם a=0 או c=0 אזי $EF=FE$ אחרת $EF\neq FE$

ב.

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}4&4\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&8\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}2^5&2^5\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&32\\0&0\end{pmatrix},\quad A^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n\\0&0\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2b\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1&2b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3b\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B^5=\begin{pmatrix}1&5b\\0&1\end{pmatrix},\quad B^n=\begin{pmatrix}1&nb\\0&1\end{pmatrix}$$