**התכנסות במידה שווה**

ב - אך לא במידה שווה, אך כן במידה שווה ב - לכל . אפשר מההגדרה, ואפשר מהמשפט הבא:

**משפט (ויירשטרס)**

יהיו פונקציות המוגדרות על קב' ומקיימות עבור מספרים ממשיים כך ש-  
אזי הטור מתכנס במידה שווה.

**הוכחה**

מקריטריון קושי להתכנסות במידה שווה.  
יהי . לכל (נניח בלי הגבלת הכלליות ):  
 מתכנס לכן סדרת הסכומים החלקיים שלו מקיימת את תנאי קושי, כלומר יש כך שלכל , מתקיים . האי שוויון הראשון נתון לכל   
 ולכן לכל .

**דוגמה**

הטור ב- לכל , . (הטור הנדסי עם  
). לכן מתכנס במידה שווה ב - .

**דוגמה**

( ב - )  
 לכן טורנו מתכנס במידה שווה.

**הערה**

מהמשפט, אם נציב בו במקום , נקבל שגם הטור מתכנס במידה שווה)

**דוגמה**

יש טורים שמתכנסים במידה שווה אך לא בהחלט.  
לכל קבוע,  
(שקול למשל על ידי מבחן ההשוואה הגבולי ל – ).  
ממשפט לייבניץ, (), שארית הטור מקיימת  
לכן במידה שווה.  
(קיבלנו בנוסף, שאם טור פונקציות מתכנס אז הטור מתכנס במידה שווה הזנב מתכנס במידה שווה ל – 0. הערה: הכיוון השני בהוכחה דומה להוכחה של הכיוון הראשון בסדר הפוך)

**תרגיל**

מתכנס שם, לא מתכנס בהחלט באף , לא מתכנס במידה שווה שם.

**משפט**

גבול במידה שווה של סדרת פונקציות רציפות הוא רציף בכל הנקודות בהן הפונקציות בסדרה רציפות:  
יהיו במידה שווה ב - .  
לכל כך שלכל פונקציה רציפה ב - , גם הפונקציה רציפה ב -

**הוכחה**

(רעיון: )  
יהי . ניקח כך שלכל מתקיים לכל .  
נקבע . הפונקציה רציפה ב – . ניקח כך שמתקיים . לכל המקיים . תהי כך ש – אזי

**מסקנה**

1. גבול במידה שווה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה.
2. אם טור של פונקציות רציפות מתכנס במידה שווה אז סכומו הוא פונקציה רציפה.

**הוכחה**

לגבי (2):  
אם במידה שווה אז  
המחשת המסקנות: אם הפונקציות רציפות וההתכנסויות הן במידה שווה, אז

**דוגמה**

במידה שווה בכל קטע .  
ואכן הפונקציה רציפה בכל קטע ולכן רציפה ב -

**דוגמה**

ייתכן ש - למרות שההתכנסות אינה במידה שווה. למשל:  
 ב - וראינו שההתכנסות אינה במידה שווה  
(

**משפט (דיני)**

יהיו פונקציות רציפות בקטע כך ש - (או ) לכל בקטע. אזי ההתכנסות היא במידה שווה.  
ניסוח עבור טורים: יהיו פונקציות ורציפות בקטע . אם הסכום   
 רציפה אז התכנסות הטור אל הוא במידה שווה.  
(כיוון ש -

**הוכחה**

בלי הגבלת הכלליות,   
(ניקח אז +רציפות  
 במידה שווה. (בדוק!)  
יהיו רציפות ב – . נניח שההתכנסות אינה במידה שווה. ניקח כך שלכל יש ונקודה כך ש - .  
לחילופין, מההגדרה השקולה מהשיעור הקודם, יש סדרה עולה של מספרים טבעיים ונקודות כך שמתקיים   
נראה שאם נקודת גבול של תת סדרה של אז הפונקציות .

המשך ההוכחה בהרצאה הבאה.