בדידה להנדסה תרגול 13

26 בינואר 2015

<u>תרגיל:</u>

מהי עוצמת הקבוצה?

1. $A = \{n^2 | n \in \mathbb{Z}\}$.

<u>פתרון:</u>

A מוכלת בקבוצה בת מניה ולכן בת מניה.

מאידך גיסא, A אינסופית. לכן, $\aleph_0$.

נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to A$ ע"י:

$$f(n) = n^2$$

נראה שהפונקציה חח"ע ועל.

אם $f(n_1) = f(n_2)$ אז $n_1^2 = n_2^2$ ולכן $|n_1| = |n_2|$. מכיוון ש־$n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ נקבל $n_1 = |n_1| = |n_2| = n_2$.

אם כן, סה"כ $f(n_1) = f(n_2) \to n_1 = n_2$ ולכן f חח"ע.

יהי $a \in A$. לכן, קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו $a = n^2$. מכיוון ש־$n \in \mathbb{Z}$, $|n| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ולכן:

$$f(|n|) = |n|^2 = n^2 = a$$

כלומר $|n|$ מקור של a.

לכן הפונקציה על, וסה"כ הפונקציה חח" ועל ולכן:

$$|A| = |\mathbb{N} \cup \{0\}|$$

אנו יודעים ש־$|\mathbb{N} \cup \{0\}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ ולכן סה"כ:

$$|A| = \aleph_0$$

2. $M_3(\mathbb{Q})$, קבוצת המטריצות מגודל 3×3 עם איברים מ־$\mathbb{Q}$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר פונקציה $f : M_3(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^9$ ע"י:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) = (a, b, c, d, e, f, g, h, i)$$

קל לראות שהפונקציה חח"ע ועל מהגדרתה.

לכן,

$$|M_3(\mathbb{Q})| = |\mathbb{Q}^9|$$

כעת, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$, ולכן:

$$|\mathbb{Q}^9| = |\mathbb{N}^9|$$

$\mathbb{N}^9$ היא קבוצת כל הסדרות מאורך 9 של מספרים טבעיים.

בהרצאה ראיתם שקבוצת הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים היא מעוצמה $\aleph_0$ ולכן גם:

$$|\mathbb{N}^9| = \aleph_0$$

וסה"כ:

$$|M_3(\mathbb{Q})| = \aleph_0$$

3. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. סדרה חשבונית מ-A היא סדרה:

$$(a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots)$$

כאשר $a_1, d \in A$.

נסמן ב-$Seq(A)$ את קבוצת כל הסדרות החשבוניות מ-A.

מהי עוצמת $Seq(\mathbb{Z})$?

<u>פתרון:</u>

נשים לב שסדרה חשבונית מוגדת ע"י איברה הראשון (a_1) והפרשה (d).

במקרה שלנו, שניהם נלקחים מ-$\mathbb{Z}$ ולכן נגדיר פונקציה $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to Seq(\mathbb{Z})$ ע"י:

$$f(a, b) = (a, a + b, a + 2b, \dots)$$

f חח"ע, מכיוון שאם $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$ אז:

$$(a_1, a_1 + b_1, a_2 + 2b_1, \dots) = (a_2, a_2 + b_2, a_2 + 2b_2, \dots)$$

סדרות שוות איבר־איבר, לכן מהאיבר הראשון נקבל $a_1 = a_2$ ובעזרת שיוויון זה נקבל מהאיבר השני: $b_1 = b_2$. סה"כ:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

ולכן $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2)) \to (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ ואכן f חח"ע.

f על ממש לפי הגדרתה (מה המקור של סדרה? הזוג שהוא איברה הראשון והפרשה).

f חח"ע ועל ולכן:

$$|Seq(\mathbb{Z})| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$$

כעת, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ ולכן גם $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$.

אנו יודעים ש־$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ ולכן בסה"כ נקבל:

$$|Seq(\mathbb{Z})| = \aleph_0$$

4. תהי $A \subseteq R$ קבוצה. נסמן:

$$A_n[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i | \forall i, 0 \leq i \leq n, a_i \in A \right\}$$

כלומר קבוצת הפולינומים ממעלה קטנה־שווה מ־n עם מקדמים מ־A.

מהי עוצמת הקבוצה $\mathbb{Q}_n[x]$?

<u>פתרון:</u>

נשים לב שפולינום מוגדר ע"י מקדמיו, ולכן נגדיר $f : \mathbb{Q}_n[x] \to \mathbb{Q}^{n+1}$ ע"י:

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

קל לראות שהפונקציה חח"ע ועל מהגדרתה.

לכן:

$$|\mathbb{Q}_n[x]| = |\mathbb{Q}^{n+1}|$$

כעת, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ ולכן $|\mathbb{N}^{n+1}| = |\mathbb{Q}^{n+1}|$.

$\mathbb{N}^{n+1}$ זו קבוצת הסדרות מאורך $n+1$ של מספרים טבעיים.

שוב, אנו יודעים שזו קבוצה שעוצמתה $\aleph_0$, וסה"כ נקבל:

$$|\mathbb{Q}_n[x]| = \aleph_0$$