חשבון אינפי מתקדם
תרגיל 6- פתרון
משפט הפונקציה הסתומה

א.

$$(*) \quad x^2+y^2+z^2-3xyz=0$$
$$f(x,y,z)=xy^2z^3$$

נגדיר פונקציה :

$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$$

נבדוק ש $g(x,y,z)$ מקיימת תנאיי משפט הפונקציה הסתומה בסביבת הנקודה $(1,1,1)$:

1) $g(1,1,1)=0$

2)

$$g(x,y,z)\in C^1(\mathbb{R}^3) \Leftarrow \begin{cases} g_x(x,y,z)=2x-3yz \\ g_y(x,y,z)=2y-3xz \\ g_z(x,y,z)=2z-3xy \end{cases}$$

3) $g_z(1,1,1)=-1\neq 0$

$\Leftarrow$ לפי משפט הפונקציה סתומה המשוואה $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ מגדירה פונקציה דיפרנציאבילית $z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,1,1)$.

$$f_x'=y^2z^3+xy^2\cdot 3z^2z_x'\Big|_{(1,1,1)}=1+3z_x'$$

לפי משפט הפונקציה סתומה :

$$z_x'=-\frac{g_x'(1,1,1)}{g_z'(1,1,1)}$$

כאשר $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$

$$g_x'=2x-3yz\Big|_{(1,1,1)}=2-3=-1$$
$$g_z'=2z-3xy\Big|_{(1,1,1)}=2-3=-1$$
$$\Rightarrow z_x'=-\frac{(-1)}{(-1)}=-1$$
$$\Rightarrow f_x'(1,1,1)=1-3=-2$$

ב.

באופן דומה בודקים שהמשוואה $(*)$ מגדירה פונקציה דיפרנציאבילית $y(x,z)$ בסביבת הנקודה $(1,1,1)$.

במקרה זה: $f_x'=y^2z^3+xz^3\cdot 2yy_x'\Big|_{(1,1,1)}=1+2y_x'$

לפי משפט הפונקציה סתומה :

$$y_x'=-\frac{g_x'(1,1,1)}{g_z'(1,1,1)}=-\frac{2x-3yz}{2y-3xz}\Bigg|_{(1,1,1)}=-\frac{(-1)}{(-1)}=-1$$

$$\Rightarrow f_x'(1,1,1)=1-2=-1$$

.2

א.

נגדיר פונקציה :

$$f(x,y,u,v)=\left(xe^{u+v}+2uv-1,\ ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}-2x\right)$$

נבדוק שפונקציה זו מקיימת תנאים של משפט הפונקציה הסתומה :

(1 $f(1,2,0,0)=(0,0)$

(2

$$\begin{cases} f_x=\left(e^{u+v},-2\right) \\ f_y=\left(0,e^{u-v}\right) \\ f_u=\left(xe^{u+v}+2v,\ ye^{u-v}-\dfrac{1}{1+v}\right) \\ f_v=\left(xe^{u+v}+2u,-ye^{u-v}+\dfrac{u}{(1+v)^2}\right) \end{cases}$$

$\Leftarrow$ הנגזרות החלקיות ופונקציה $f(x,y,u,v)$ רציפות בסביבת הנקודה $(1,2,0,0)$.

(3

$$J_f(1,2,0,0)=\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{1v} \\ f_{2u} & f_{2v}\end{vmatrix}=$$

$$=\left.\begin{vmatrix} xe^{u+v}+2v & xe^{u+v}+2u \\ ye^{u-v}-\dfrac{1}{1+v} & -ye^{u-v}+\dfrac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}\right|_{(1,2,0,0)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2-1 & -2\end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$$

$\Leftarrow$ המערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $u(x,y)$ ו- $v(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0,0)$.

ב.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} f_{1x} & f_{1v} \\ f_{2x} & f_{2v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{1v} \\ f_{2u} & f_{2v}\end{vmatrix}}=-\left.\frac{\begin{vmatrix} e^{u+v} & xe^{u+v}+2u \\ -2 & -ye^{u-v}+\dfrac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}}{-3}\right|_{(1,2,0,0)}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2\end{vmatrix}}{-3}=-\frac{(-2+2)}{3}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} f_{1y} & f_{1v} \\ f_{2y} & f_{2v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{1v} \\ f_{2u} & f_{2v}\end{vmatrix}}=-\left.\frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{u+v}+2u \\ e^{u-v} & -ye^{u-v}+\dfrac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}}{-3}\right|_{(1,2,0,0)}=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\end{vmatrix}}{-3}=-\frac{(-1)}{-3}=-\frac{1}{3}$$

$\Leftarrow$ $\underline{du(1,2)=-{}^{1}\!/_{3}\,dy}$.

.3

מגדירים פונקציה $f\left(x,y,u,v\right)=\left(u+v-x-y,\dfrac{\sin u}{\sin v}-\dfrac{x}{y}\right)$ ובודקים שהיא מקיימת את תנאיי המשפט הפונקציה הסתומה בסביבת הנקודה $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

.4

א.

נגדיר פונקציה

$$f\left(x,y,u,v\right)=\left(e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}-\frac{x}{\sqrt{2}},e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

נבדוק שפונקציה זו מקיימת תנאים של משפט הפונקציה הסתומה :

1) $$f\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(0,0\right)$$

2)

$$\begin{cases} f_x=\left(-\dfrac{u}{x^2}e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{u}{x^2}\sin\dfrac{v}{y}\right) \\ f_y=\left(\dfrac{v}{y^2}e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y},-\dfrac{v}{y^2}e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ f_u=\left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y},\dfrac{1}{x}e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}\right) \\ f_v=\left(e^{\frac{u}{x}}\left(-\dfrac{1}{y}\right)\sin\dfrac{v}{y},e^{\frac{u}{x}}\cdot\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{v}{y}\right) \end{cases}$$

הנגזרות החלקיות ופונקציה $f\left(x,y,u,v\right)$ רציפות בסביבת הנקודה $\left(1,1,0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3)

$$J_f\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\neq 0$$

$\Leftarrow$ המערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $u\left(x,y\right)$ ו- $v\left(x,y\right)$ בסביבת הנקודה $\left(1,1,0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

ב.

$$du(1,1)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)\,dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\left.\frac{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}}\right|_{\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)}=-\left.\frac{\begin{vmatrix} f_{1x} & f_{1v}\\ f_{2x} & f_{2v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{1v}\\ f_{2u} & f_{2v}\end{vmatrix}}\right|_{\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}}{1}=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\left.\frac{\begin{vmatrix} f_{1y} & f_{1v}\\ f_{2y} & f_{2v}\end{vmatrix}}{1}\right|_{\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)}=-\begin{vmatrix} -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right)=\frac{1}{2}$$

$$\underline{du(1,1)=\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy}\quad\Leftarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)=-\left.\frac{\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{1x}\\ f_{2u} & f_{2x}\end{vmatrix}}{1}\right|_{\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)}=-\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(1,1)=-\left.\frac{\begin{vmatrix} f_{1u} & f_{1y}\\ f_{2u} & f_{2y}\end{vmatrix}}{1}\right|_{\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)}=-\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-1\right)-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\underline{dv(1,1)=-\frac{1}{2}dx+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dy}\quad\Leftarrow$$

.5

א.

נגדיר פונקציה :

$$f\left(x,y,z,u,v\right)=$$
$$\left(x^2-y\cos\left(uv\right)+z^2,\ x^2+y^2-\sin\left(uv\right)+2z^2-2,\ xy-\sin u\cos v+z\right)$$

נבדוק שפונקציה זו מקיימת תנאים של משפט הפונקציה הסתומה :

(1

$$f\left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)=\left(1-1+0,1+1-0+0-2,1-1+0\right)$$
$$=\left(0,0,0\right)$$

(2

$$\begin{cases} f_x=\left(2x,2x,y\right)\\ f_y=\left(-\cos\left(uv\right),2y,x\right)\\ f_z=\left(2z,4z,1\right)\\ f_u=\left(yv\sin\left(uv\right),-v\cos\left(uv\right),-\cos u\cos v\right)\\ f_v=\left(uy\sin\left(uv\right),-u\sin\left(uv\right),\sin u\sin v\right)\end{cases}$$

הנגזרות החלקיות ופונקציה $f\left(x,y,z,u,v\right)$ רציפות בסביבת הנקודה $\left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)$.

(3

$$\frac{\partial\left(f_1,f_2,f_3\right)}{\partial\left(x,y,z\right)}=\begin{vmatrix} f_{1x} & f_{1y} & f_{1z}\\ f_{2x} & f_{2y} & f_{2z}\\ f_{3x} & f_{3y} & f_{3z}\end{vmatrix}=\left.\begin{vmatrix} 2x & -\cos\left(uv\right) & 2z\\ 2x & 2y & 4z\\ y & x & 1\end{vmatrix}\right|_{\left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4+2=6\neq 0$$

$\Leftarrow$ המערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $x\left(u,v\right)$, $y(u,v)$ ו- $z\left(u,v\right)$ בסביבת הנקודה $\left(1,1,0,\frac{\pi}{2},0\right)$.

ב.

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(1,1\right)=\frac{-\dfrac{\partial\left(f_1,f_2,f_3\right)}{\partial\left(u,y,z\right)}}{\dfrac{\partial\left(f_1,f_2,f_3\right)}{\partial\left(x,y,z\right)}}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\left(1,1\right)=\frac{-\dfrac{\partial\left(f_1,f_2,f_3\right)}{\partial\left(v,y,z\right)}}{6}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

טל"ח