<u>פתרון-תרגיל 1</u>

.1

א.

$$z^3-10z^2+34z=0$$

$z\left(z^2-10z+34\right)=0$ או ש $z=0$ או ש $z^2-10z+34=0$.

$$z^2-10z+34=0$$
$$z=\frac{10\pm\sqrt{\left(-10\right)^2-4\cdot1\cdot34}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}$$
$$z_1=5+3i$$
$$z_2=5-3i$$

תשובה סופית: $z_1=5+3i, z_2=5-3i, z_3=0$.

ב.

$$z^2-\left(1-3i\right)z-2i-2=0$$
$$z=\frac{1-3i\pm\sqrt{\left(1-3i\right)^2+8i+8}}{2}=\frac{1-3i\pm\sqrt{2i}}{2}$$

ראינו בתרגול ש $\left(1+i\right)^2=2i$

$$z=\frac{1-3i\pm\left(1+i\right)}{2}$$
$$z_1=1-i$$
$$z_2=-2i$$

תשובה סופית: $z_1=1-i, z_2=-2i$.

ג.

$(i+1)(x+iy)=4+2i$

$x-y+(x+y)i=4+2i$

בתרגול ראינו ש $a+bi=c+di \leftrightarrow a=c \wedge b=d$.

לכן יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \to x=3, y=-1$$

תשובה סופית: $x=3, y=-1$.

2. א. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^8=\left(\sqrt{2}\right)^8(1+i)^8=16\left((1+i)^2\right)^4=16(2i)^4=256$.

ב. $\frac{5}{3+2i}=\frac{5}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{15-10i}{13}=\frac{15}{13}-\frac{10}{13}i$.

ג. $\left(1+i+i^2+...+i^{34}\right)^{71}$

תחילה נחשב את הסכום $1+i+i^2+...+i^{34}$

נשים לב ש $1+i+i^2+i^3=0$ ובאופן כללי לכל n טבעי מתקיים $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0$.

ולכן $1+i+i^2+...+i^{34}+i^{35}=0 \to 1+i+i^2+...+i^{34}=-i^{35}$.

$i^{35}=i^{4\cdot 8}\cdot i^3=-i$.

כעת $\left(1+i+i^2+...+i^{34}\right)^{71}=(-i)^{71}=-i^{71}=-i^{4\cdot 17}\cdot i^3=i$.

3. תחילה נמצא את מנת הסדרה.

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\cdot\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נחשב את הביטוי $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$.

תחילה נציג את המספר $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ בצורה קוטבית. $r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \to r=1$.

$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\to\theta=60^0$. הנקודה $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ נמצאת ברביע הראשון, ולכן

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 60^0+i\sin 60^0$.

סה"כ נקבל: $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)^6=\cos 360^0+i\sin 360^0=1$

נחשב את הסכום של הסדרה ההנדסית.

מנת הסדרה היא $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$S_{6n}=\frac{a_1\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6n}-1\right)}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1}=\frac{a_1\left(1^n-1\right)}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=0.$$

.4

$1=\cos\left(360^0k\right)+i\sin\left(360^0k\right)$ כאשר k מספר שלם.

$$z^7=\cos\left(360^0k\right)+i\sin\left(360^0k\right)$$
$$z_k=\cos\left(\frac{360^0k}{7}\right)+i\sin\left(\frac{360^0k}{7}\right)$$
$$k=0,1,2,\ldots,6$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}=\left(\cos 45^0+i\sin 45^0\right)^{10}=\cos 450^0+i\sin 450^0=\cos 90^0+i\sin 90^0$$

דרך נוספת לחישוב: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\left(1+i\right)^2\right)^5=\frac{1}{2^5}\cdot 2^5\cdot i^5=i=\cos 90^0+i\sin 90^0$

$$z^4 = \cos\left(90^0 + 360^0 k\right) + i\sin\left(90^0 + 360^0 k\right)$$
$$z_k = \cos\left(18^0 + 72^0 k\right) + i\sin\left(18^0 + 72^0 k\right)$$
$$k = 0,1,2,3$$

5. $F = \{0,1,a,b\}$. 0 איבר נטרלי לחיבור, 1 איבר נטרלי לכפל.

*	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

6. נשתמש במשפט דה מאובר: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$

נתבונן בסדרה:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha), (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3, (\cos\alpha + i\sin\alpha)^5, \ldots, (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n-1}$$

נקבל סדרה הנדסית עם n איברים שמנתה $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$ וממשפט דה מאובר נקבל ש $q = \left(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)\right)$.

הוכחנו בתרגול שסכום סדרה הנדסית: $S_n = \dfrac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ $q \neq 1$.

מקרה א: $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ במקרה זה מנת הסדרה שונה מ 1.

$$S_n = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)\left(\left(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)\right)^n - 1\right)}{\left(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)\right) - 1} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)\left(\left(\cos(2n\alpha) + i\sin(2n\alpha)\right) - 1\right)}{\left(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)\right) - 1}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2\beta$ ונקבל $\cos(2\beta) - 1 = -2\sin^2\beta$ (*).

שימו לב שמזהות (*) $\cos(2n\alpha) - 1 = -2\sin^2(n\alpha)$ ו $\cos(2\alpha) - 1 = -2\sin^2(\alpha)$.

$$S_n=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(i\sin(2n\alpha)+\cos(2n\alpha)-1)}{i\sin(2\alpha)+\cos(2\alpha)-1}=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(i\sin(2n\alpha)-2\sin^2(n\alpha))}{i\sin(2\alpha)-2\sin^2(\alpha)}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$ ואז $\sin(2n\alpha)=2\sin n\alpha\cos n\alpha$

$$S_n=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)(i2\sin(n\alpha)\cos(n\alpha)-2\sin^2(n\alpha))}{i2\sin(\alpha)\cos(\alpha)-2\sin^2(\alpha)}=\frac{2\sin(n\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)(i\cos(n\alpha)-\sin(n\alpha))}{2\sin(\alpha)(i\cos(\alpha)-\sin(\alpha))}=$$
$$=\frac{\sin(n\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)(-\sin(n\alpha)+i\cos(n\alpha))}{\sin(\alpha)(-\sin(\alpha)+i\cos(\alpha))}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטריות $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ו $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$S_n=\frac{\sin(n\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\alpha\right)\right)}{\sin(\alpha)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית $-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$ ו $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$.

$$S_n=\frac{\sin(n\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\alpha\right)\right)}{\sin(\alpha)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)}=$$
$$=\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+n\alpha-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+n\alpha-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=$$
$$=\frac{\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}\cdot(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha))=$$

ניקח את החלק המדומה ונקבל שהסכום המבוקש הוא $\frac{\sin^2(n\alpha)}{\sin\alpha}$

7) יש למצוא את כל המספרים $a_0, a_1 a_2$ שעבורם מתקיים:

$$a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 = -3$$

$$a_0 + a_1 9 + a_2 9^2 = 4$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = 4$$

כלומר את כל הפתרונות למערכת המשוואות

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -3$$

$$a_0 + 9a_1 + 81a_2 = 4$$

$$a_0 + ta_1 + t^2 a_2 = 4$$

המטריצה שמתארת את המערכת היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 1 & 9 & 81 & | & 4 \\ 1 & t & t^2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

על ידי דירוג נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 1 & 9 & 81 & | & 4 \\ 1 & t & t^2 & | & 4 \end{pmatrix} \underrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 0 & 7 & 77 & | & 7 \\ 1 & t & t^2 & | & 4 \end{pmatrix} \underrightarrow{R_3 = R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 0 & 7 & 77 & | & 7 \\ 0 & t-2 & t^2-4 & | & 7 \end{pmatrix} \underrightarrow{R_2 = \frac{1}{7} R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 0 & 1 & 11 & | & 1 \\ 0 & t-2 & t^2-4 & | & 7 \end{pmatrix} \underrightarrow{R_3 = R_3 - (t-2)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 0 & 1 & 11 & | & 1 \\ 0 & 0 & t^2 - 4 - 11(t-2) & | & 7-(t-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 0 & 1 & 11 & | & 1 \\ 0 & 0 & t^2 - 11t + 18 & | & 9-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 0 & 1 & 11 & | & 1 \\ 0 & 0 & (t-9)(t-2) & | & 9-t \end{pmatrix}$$

כעת, נפצל לשלוש אפשרויות.

א) אם $t \neq 2,9$ יש פתרון יחיד.

נמצא את הפתרון:

מהשורה השלישית של המטריצה נקבל: #

$$(t-9)(t-2)a_2 = 9 - t \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2-t}$$

מהשורה השניה נקבל:

$$a_1 + 11a_2 = 1 \Longrightarrow a_1 = 1 - \frac{11}{2-t} = -\frac{9+t}{2-t}$$

מהשורה הראשונה נקבל:

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -3 \Longrightarrow a_1 = -3 + 2\frac{9+t}{2-t} - \frac{4}{2-t} = \frac{5t+8}{2-t}$$

לכן הפתרון היחיד הוא #

$$\left(\frac{5t+8}{2-t}, -\frac{9+t}{2-t}, \frac{1}{2-t}\right)$$

ב) אם $t = 9$. מתקבלת המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 0 & 1 & 11 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

אנו מקבלים ש a_2 הוא משתנה חופשי (אין בעמודה שלו איבר מוביל) לכן נכתוב $a_2 = s$.

מהשורה השנייה נקבל

$$a_1 + 11a_2 = 1 \Longrightarrow a_1 = 1 - 11s$$

מהשורה הראשונה נקבל

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -3 \Longrightarrow a_1 = -3 - 2(1 - 11s) - 4s = 18s - 5$$

לכן הפתרון במקרה זה הוא

$$(18s - 5, 1 - 11s, s)$$

לכל s.

ג) אם $t = 2$ מתקבלת המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & -3 \\ 0 & 1 & 11 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 7 \end{pmatrix}$$

השורה השלישית היא שורת סתירה ולכן אין פתרון.

8) המטריצה שמייצגת את המערכת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a^2 & 5 & 1 & b \\ a & a+3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a^2 & 5 & 1 & b \\ a & a+3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ a & a+3 & 3 & 0 \\ a^2 & 5 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3-a & 3-a & 0 \\ a^2 & 5 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 - a^2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3-a & 3-a & 0 \\ 0 & 5-2a^2 & 1-a^2 & b \end{array}\right)$$

נניח ש $a \neq 3$. את המקרה שבו $a = 3$ נשלים אח"כ.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3-a & 3-a & 0 \\ 0 & 5-2a^2 & 1-a^2 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = \frac{1}{3-a}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5-2a^2 & 1-a^2 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 - (5-2a^2)R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2-(5-2a^2) & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & b \end{array}\right)$$

נניח ש $a \neq 2, -2$. גם למקרים האלה נחזור אחר כך.

נקבל שיש פתרון יחיד.

מהשורה השלישית

$$(a^2-4)x_3 = b \Longrightarrow x_3 = \frac{b}{a^2-4}$$

מהשורה השניה

$$x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = -\frac{b}{a^2-4}$$

מהשורה הראשונה

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2\frac{b}{a^2-4} - \frac{b}{a^2-4} = \frac{b}{a^2-4}$$

לכן הפתרון הוא

$$\left(\frac{b}{a^2-4}, -\frac{b}{a^2-4}, \frac{b}{a^2-4}\right)$$

נחזור למקרים שעזבנו קודם.

א) אם $a=3$ נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -13 & -8 & | & b \end{pmatrix}$$

שאותה מסיימים לדרג על ידי

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -13 & -8 & | & b \end{pmatrix} \overrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -13 & -8 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מצב של אינסוף פתרונות

בעמודה של x_3 אין איבר מוביל ולכן נסמן $x_3 = s$.

מהשורה השניה

$$-13x_2 - 8x_3 = b \Longrightarrow x_2 = -\frac{b+8s}{13}$$

מהשורה הראשונה

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2\frac{b+8s}{13} - s = \frac{2b+3s}{13}$$

לכן הפתרון הוא

$$\left(\frac{2b+3s}{13}, -\frac{b+8s}{13}, s\right)$$

לכל $s \in \mathbb{R}$.

ב) אם $a = 2, -2$ המטריצה מקודם הופכת להיות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & b \end{pmatrix}$$

אם $b \neq 0$ אז אין פתרון.

אם $b = 0$. נקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $x_3 = s$.

מהשורה השניה

$$x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = -s$$

מהשורה הראשונה

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2s - s = s$$

לכן הפתרון הוא

$$(s, -s, s)$$

לכל $s \in \mathbb{R}$.

נסכם את מה שקיבלנו:

- אם $a \neq 2, -2, 3$ יש פתרון יחיד # $\left(\frac{b}{a^2-4}, -\frac{b}{a^2-4}, \frac{b}{a^2-4}\right)$
- אם $a = 3$ יש אינסוף פתרונות # $\left(\frac{2b+3s}{13}, -\frac{b+8s}{13}, s\right)$
- אם $a = 2, -2$ ו $b \neq 0$ אין פתרון
- אם $a = 2, -2$ ו $b = 0$ יש אינסוף פתרונות # $(s, -s, s)$

9) בשדה $\mathbb{Z}_7$ צורת הפתרון היא בדיוק כמו בשאלה 8, מבצעים את אותם חישובים ומגיעים לאותו פתרון.

רק נכתוב את אותו פתרון במונחי $\mathbb{Z}_7$.

$$-2 = 5\ (mod7) \qquad -4 = 3\ (mod7) \qquad 8 = 1\ (mod7)$$

$$\frac{1}{13} = \frac{1}{6} = 6\ (mod7) \qquad -\frac{1}{13} = -6 = 1\ (mod7) \qquad \frac{2}{13} = 2 \cdot 6 = 5\ (mod7) \qquad \frac{3}{13} = 3 \cdot 6 = 4\ (mod7)$$

לכן הפתרון הוא:

- אם $a \neq 2,5,3$ יש פתרון יחיד #
$\left(\frac{b}{a^2+3}, -\frac{b}{a^2+3}, \frac{b}{a^2+3}\right)$
- אם $a = 3$ יש אינסוף פתרונות #
$(5b+4, b+s, s)$
- אם $a = 2,5$ ו $b \neq 0$ אין פתרון
- אם $a = 2,5$ ו $b = 0$ יש אינסוף פתרונות #
$(s, -s, s)$

10) $121 = 11^2$.

לכן כל מערכת עם שתי משתנים חופשיים מעל השדה $\mathbb{Z}_{11}$ תתאים.

למשל

$x + y + z = 0$

מעל השדה $\mathbb{Z}_{11}$.