אינפי II - הרצאה IV

12.3.2013

נמשיך גם בהרצאה זו בפתרון אינטגרלים.

דוגמא 1: $\int \frac{x^3}{x^8-3}dx$

נבצע זאת בהצבה. נבחר $u=x^4, du=4x^3dx$. נציב ונקבל $\int \frac{x^3}{x^8-3}dx=\int \frac{\frac{1}{4}du}{u^2-3}=\frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2-3}du$ וכעת נבצע איטגרציה לפי שברים חלקיים ז"א $\frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2-3}du=\frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{1}{u-\sqrt{3}}-\frac{1}{u+\sqrt{3}}du=\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|=\boxed{\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{3}}{x^4+\sqrt{3}}\right|+C}$.

דוגמא 2: $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

נבחר $u=\sqrt{x}, du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. נציב ונקבל $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx=\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}2\sqrt{x}du=\int \frac{2}{1+u^2}du=2\arctan u+C$

ואז $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx=\boxed{2\arctan\sqrt{x}+C}$

דוגמא 3: $\int \frac{1}{\sin x}dx$

מתרגיל הבית. לפתור ע"י הצבת $u=\cos x$

דוגמא 4: $\int \sin^7 x\cos^8 x\,dx$

נציב $u=cosx$, $du=-sinx\,dx$ ונעביר את האינטגרל לצורה $\int sinx\,(1-\cos^2 x)^3\cos^8 x\,dx$ ולכן מתקבל האינטגרל

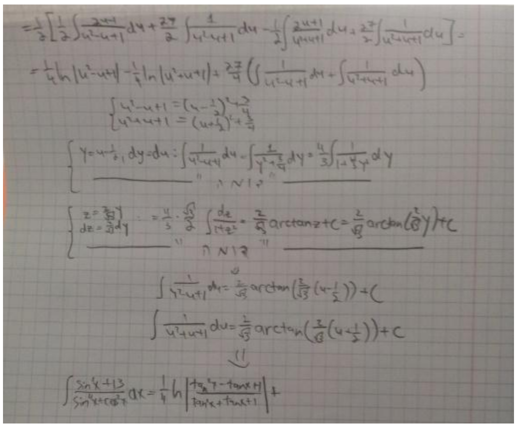
$$\int sinx\,(1-\cos^2 x)^3\cos^8 x\,dx=-\int u^8(1-u^3)^2\,du=\boxed{-\frac{\cos^9 x}{9}+\frac{3\cos^{11}x}{11}-\frac{3\cos^{13}x}{13}+\frac{\cos^{15}x}{15}+C}.$$

דוגמא 5: $\int \frac{\sin^2 x+13}{\sin^4 x+\cos^2 x}dx$

נציב $u=\tan x$ ואז $\sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2}$, $\cos^2 x=\frac{1}{1+u^2}$. וגם $du=\frac{1}{\cos^2 x}dx=(u^2+1)du$. כעת נבצע את ההצבה ונראה מה יוצא:

ואז $\int \frac{14u^2+13}{(u^2+1)^2-u^2}du=\int \frac{14u^2+13}{u^4+u^2+1}du=\int \frac{u^2+13+13u^2}{u^4+u^2+1}du=\int \frac{u^2(1+u^2)+13(1+u^2)^2}{u^4+u^2+1}\frac{du}{u^2+1}$

ע"פ פירוק לשברים מתקבל $\frac{14u^2+13}{(u^2+1)^2-u^2}=\frac{Au+B}{u^2-u+1}+\frac{Cu+D}{u^2+u+1}=\cdots=\frac{\frac{1}{2}u+\frac{13}{2}}{u^2-u+1}+\frac{-\frac{1}{2}u+\frac{13}{2}}{u^2+u+1}$. מכאן האינטגרל נהיה יותר פשוט.



כעת נעבור לפצצה הגרעינית של האינטגרציה. מצד אחד היא מאוד חזקה, ומצד שני אי אפשר להשתמש בה כמעט אף פעם.

<u>ההצבה הטריגונומטרית האוניברסלית:</u>

מציבים $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ואז $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u^2}{1+u^2}, \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+u^2}$. וגם $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ואז $\tan x = \frac{2u}{1-u^2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$

כעת נפתור שוב את התרגיל מתחילת השיעור $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$.

בד"כ, עדיף לנסות כל כלי אחר ורק אחר כך את ההצבה האוניברסלית. כדי להיווכח בכך נביט בדוגמא הקודמת ונראה עד כמה ההצבה 'יעילה'.