צירופים ליניאריים

הגדרה: יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$ ו $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ אזי ביטוי מהצורה $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$ נקרא צירוף לינארי (צ"ל) של $v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$.

לדוגמא: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. אזי

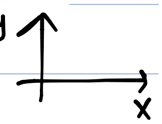
$$\pi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - \sqrt{3}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

הוא צירוף לינארי.

הגדרה: **המרחב הנפרש** על ידי הוקטורים $v_1, \ldots, v_n$ מוגדר להיות **קבוצת (אוסף) כל הצירופים הלינאריים** של הוקטורים הללו. כלומר,

$$span\{v_1 \ldots v_n\} = \{a_1v_1 + \ldots a_nv_n \mid a_1, \ldots a_n \in \mathbb{F}\} =$$
$$= \{v \in V \mid \exists a_1 \ldots a_n \in \mathbb{F} : a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = v\}$$

$\vec{x}$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{y}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



באופן כללי: תהא $S \subseteq V$ תת קבוצה של מ"ו (ייתכן קבוצה אין סופית) אזי

$$span(S) = \{a_1v_1 + \ldots + a_nv_n | n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F},\ v_1, \ldots, v_n \in S\}$$

באופן שקול $span(S)$ הוא איחוד כל הצירופים הלינאריים של כל תתי הקבוצות הסופיות של S.

הערה: $span(S)$ הינו תמיד תת-מרחב כפי שקל להוכיח באמצעות הקריטריון המקוצר - צירוף לינארי של צירופים לינאריים הינו צירוף לינארי בעצמו. בנוסף הוא התת מרחבב הקטן ביותר (מינימום לפי יחס ההכלה) המכיל את הקבוצה אותה הוא פורש

כלומר אם ת"מ $V \leq W$ מקיים $S \subseteq W$ אזי $span(S) \subseteq W$

הוכחה:

$v \in Span(s)$ צריכה להוכיח שייך ל- W.

$v \in Span(s) \rightarrow \exists a_1 \ldots a_n \in \mathbb{F},\ v_1 \ldots v_n \in S : v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

בגלל סגירות בת"מ לכפל בסקלאר ולחיבור נקבל $v \in W$

מש"ל

הערה: אם $S = \emptyset$ קבוצה ריקה אזי מגדירים פורמאלית כי $span(S) = \{0\}$

תבונות

יהיה V מ"ו. יהיו $A, B \subseteq V$ תתי קבוצות ו $W, U \leq V$ תתי מרחבים. אזי

1. $U + W = span\{U \cup W\}$, וכפי שאמרנו הסכום הינו תת המרחב הקטן ביותר המכיל את שני תתי המרחבים.
2. $A \subseteq span(A)$
3. $A \subseteq B$ אזי $span(A) \subseteq span(B)$
4. בתירגול הקודם ראינו כי
   $span\{v_1, \dots v_m\} + span\{v_{m+1}, \dots v_{m+k}\} = span\{v_1, \dots v_{m+k}\}$
   1. באופן כללי מתקיים כי $span(A) + span(B) = span(A \cup B)$. הוכחה:
      מצד אחד $A, B \subseteq A \cup B$ ולכן $span(A), span(B) \subseteq span(A \cup B)$ ולכן
      $span(A) + span(B) \subseteq span(A \cup B)$מצד שני
      $A \subseteq span(A) \subseteq span(A) + span(B)$ ובאופן דומה גם
      $B \subseteq span(A) + span(B)$ ולכן $A \cup B \subseteq span(A) + span(B)$ ולכן
      $span(A \cup B) \subseteq span(A) + span(B)$
5. $span(W) = W$ (רק אם W ת"מ!)
6. מסקנה: אם $A \subseteq span(B)$ אז $span(A) \subseteq span(B)$ (הוכחה:
   $span(A) \subseteq span(span(B)) = span(B)$)

תרגילים:

תרגיל 1

במרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ נגדיר $S = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\}$

מצא עבור אילו $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in span(S)$

דרך: למצוא

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & a\\1 & 3 & 2 & b\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & a\\0 & 1 & 4 & b-a\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -10 & 3a-2b\\0 & 1 & 4 & b-a\end{array}\right)$$

אין איבר ציר
משתנה חופשי

למערכת הנ"ל יש אינסוף פתרונות

$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in span(S)$

תרגיל 2

במרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{R}$ נגדיר

$$S=\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\}$$

הציגו את $span(S)$ ע"י משוואות. מצאו, אם קיים, מטריצה שאינה ב $span(S)$. האם S בת"ל?

לשאול מה יש ב$span(S)$ $\Longleftrightarrow$ עבור איזה $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$$\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\alpha_3 V_3=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

נציג את המטריצים כוקטורים

$$v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&-1\\0&1&1\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{דירוג}]{\text{לאחר}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&b\\0&1&1&c\\0&0&-2&d-b-3c\\0&0&0&a-b-2c\end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון נרצה ללא שורת סתירה:

$$a-b-2c=0$$

$$span(S)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\, a-b-2c=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}b+2c&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\, b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}b+2c&b\\c&d\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

בת"ל ✓

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\notin span(S)$$

הערה: ניתן להגדיר/להציג תת מרחב בכמה דרכים

בסעיף זה נראה מספר הצגות לאותו תת מרחב נראה שישנן שלוש דרכים שונות להציג את אותו תת המרחב הוקטורי.

תרגיל.

יהי $V = \mathbb{R}^4$, הוכח ששלוש הקבוצות הבאות שוות:

- A $span\{(0,1,1,1),(2,1,3,-1),(1,1,2,0)\}$
- B $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | (z-y-x=0) \wedge (w-y+x=0)\}$
- C $\{(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}, t, s) | t,s \in \mathbb{R}\}$

פתרון:

נראה $A=B$.

$(x,y,z,w) \in A \to \exists a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad a(0\,1\,1\,1)+b(2\,1\,3\,-1)+c(1\,1\,2\,0)=(x,y,z,w)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & z-y-x \\ 0 & 0 & 0 & w-y+x \end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון נדרוש

$$\text{קבוצה } B \longleftarrow \begin{cases} z-y-x=0 \\ w-y+x=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \quad\quad\quad\quad t \quad\; s \end{array}$$

$$\begin{matrix} x-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}s=0 \\ y-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}s=0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x=\frac{t-s}{2} \\ y=\frac{t+s}{2} \end{matrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{t-s}{2} \\ \frac{t+s}{2} \\ t \\ s \end{pmatrix} \quad t,s \in \mathbb{R}\right\}$$

תרגיל

תרגיל: יהא V מ"ו ויהיו $v_1, \dots, v_n$ וקטורים. אם $v_1, \dots, v_n$ בת"ל אזי הוקטורים $v_1, v_2 + v_1, \dots, v_n + v_1$ גם בת"ל.

נניח בשלילה ש $v_1, v_2+v_1, v_3+v_1, \dots, v_n+v_1$ כן תלויים לינארית

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{F} : \alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_2+v_1) + \dots + \alpha_n(v_n+v_1) = 0$$

כשלפחות אחד מ-$\alpha_i \neq 0$.

$$v_1(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n) + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

קיבלנו צ"ל לא טריוויאלי של $v_1 \dots v_n$ שנותן 0

בסתירה לכך ש $\{v_1 \dots v_n\}$ בת"ל.

תרגיל:

יהא $\mathbb{F}^{n\times n}$ מ"ו. $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. הוכיחו/הפריכו $\{A, A^2\}$ בת"ל.

פתרון:

$$-I = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad (-I)^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

כמובן לא בת"ל $1\cdot(-I) + 1\cdot(-I)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

תרגיל:

V מ"ו. $v_1, v_2, v_3 \in V$. הוכיחו או הפריכו – v_3, v_2, v_1 בת"ל בזוגות

אז $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל. הפרכנו. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

תלות לינארית

דיברנו על כך שצירופים לינאריים הינם כל הסכומים (כולל כפל בסקלרים) של הוקטורים הנתונים. אם נסתכל על פרישה באופן גיאומטרי, אנו רואים שעל ידי וקטורים נפרשים: קו ישר, מישור, מרחב או משהו 4 מימדי ומעלה. כעת, אנו רוצים לראות אילו מהוקטורים "מיותר" כלומר, אם אנחנו יודעים ש100 וקטורים פורשים מישור מסויים, כמה וקטורים מהם אפשר להסיר ועדיין לקבל את אותו המישור? במקרה וניתן להסיר וקטור כלשהו, קבוצה הוקטורים תקרא **תלויה לינארית**.

באופן פורמאלי:

הגדרות:

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו וקטורים $v_1,\ldots,v_n \in V$ כלשהם אזי

1. ה**צ"ל הטריוואלי** הוא צירוף לינארי שכל המקדמים שווים 0 (ואז גם הצירוף שלהם שווה 0). כלומר הצירוף לינארי $0v_1+0v_2+\cdots 0v_n=0$.
2. נאמר ש $v_1,\ldots,v_n \in V$ **בילתי תלויים לינארית** אם אם הצ"ל ה**יחידי** שמתאפס הוא הצ"ל הטרוויאלי. באופן שקול אם יש צ"ל שמתאפס אזי הוא הצ"ל הטרוויאלי. ובסימונים: $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n=0 \Rightarrow \forall i\alpha_i=0$
3. $v_1,\ldots,v_n \in V$ יקראו **תלויים לינארית** אם הם לא בלתי תלויים לינארית. באופן שקול אם קיימים סקלרים $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{F}$ לא כולם אפס כך שמתקיים $a_1v_1+\ldots+a_nv_n=0$

הגדרה (הכלל): קבוצה $S\subseteq V$ נקראת תלויה לינארית אם קיימת בתוכה קבוצה סופית כלשהי של וקטורים, כך שוקטוריה תלויים לינארית לפי ההגדרה לעיל. [לא נתעסק בקורס זה בקבוצת אינסופיות בת"ל, אבל אתם יותר ממוזמנים לנסות לחשוב על מרחב וקטורי בעל קבוצה אינסופית בת"ל של וקטורים.]

הערה: הקבוצה הריקה $\emptyset\subseteq V$ מוגדרת כקבוצה בת"ל.

דוגמאות:

דוגמא 1

$V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$

דוגמא 2

2. (דוגמא מייצגת) $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$. האם הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל?

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

דוגמא 3

יהי $0 \neq v \in V$ אזי $\{v\}$ קבוצה בת"ל.

לחילופין יהי $S = \{v_1 \ldots, v_n\}$ כך ש $0_V \in S$ אזי S ת"ל (ניקח צ"ל שכל המקדמים שווים אפס פרט למקדם של וקטור האפס שניקח להיות שווה 1).

דוגמא 4

$V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים עד דרגה 2 מעל $\mathbb{R}$ תהא $S = \{2+6x, x^2, 1+2x+2x^2\}$. האם S בת"ל?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{\text{לאחר דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

קיים פתרון יחיד טריוויאלי $\longrightarrow$ לא תלוי לינארית

דוגמא 5

תרגיל.

האם הפולינומים $x^3-x+1, 2x^2+x-1, x^3-1$ תלויים לינארית?

פתרון:

$$\alpha_1(x^3-x+1)+\alpha_2(2x^2+x-1)+\alpha_3(x^3-1)$$

נפרק לגורמים

$$(\alpha_1+\alpha_3)x^3+2\alpha_2x^2+(\alpha_2-\alpha_1)x+(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\cdot 1=0$$

קל לראות שכדי שיתקיים: רק $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ לכן בת"ל

דוגמא 6

הקבוצה $\{1, x, x^2, x^3, \dots\} \subseteq \mathbb{F}[x]$ היא בת"ל

משפט

$v_1, \dots, v_n \in V$ ת"ל אם"ם אחד מהוקטורים הינו צירוף לינארי של האחרים

הוכחה

נניח בה"כ $V_1 = \alpha_1 V_2 \dots \alpha_{n-1} V_n$ שלפחות אחד מ $\alpha_i \neq 0$

$\Rightarrow$

$0 = -V_1 + \alpha_1 V_2 + \dots + \alpha_{n-1} V_n \Longrightarrow$ קיבלנו צ"ל לא טריוויאלי

של $V_1 \dots V_n$ שנותן 0 $\longleftarrow$ $V_1 \dots V_n$ ת"ל

$\Leftarrow$

$V_1 \dots V_n \in V$ ת"ל $\quad \underset{\neq 0}{\exists \alpha_i} : \sum \alpha_i V_i = 0$

נעבור אל צ"ל בה"כ V_1 נניח בה"כ $\alpha_1 \neq 0$ אחד מהם

$$-\alpha_1 V_1 = \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$$

$$V_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) V_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) V_n$$

$\downarrow$

כלומר קיבלנו וקטור

המיוצג ע"י צ"ל של האחרים

משל

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מסקנה: אם v_1 הינו צירוף לינארי של האחרים ניתן להסיר אותו במובן הבא:
$\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathrm{span}\{v_2, \dots, v_n\}$.

בסיס ומימד

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי (או תת מרחב) מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subset V$ תקרא בסיס אם

1. B בת"ל
2. B פורשת את המרחב, כלומר $span(B) = V$

הגדרה: המימד של V הוא $dim_{\mathbb{F}}V = |B|$ (מספר האיברים ב B) כאשר B הוא בסיס. אם $dim_{\mathbb{F}}V < \infty$ אזי V יקרא נוצר סופית.

משפט: ההגדרה של מימד מוגדרת היטב ואינה תלויה בבחירת הבסיס. כלומר כל שתי בסיסים B, B' בעלי אותה עוצמה (בעלי אותו מספר איברים).

משפט: לכל מרחב וקטורי **קיים** בסיס

דוגמאות:

בסיסים סטנדרטים:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. $V = \mathbb{R}^3$ אזי $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס. (המימד 3)

בהכללה הבסיס הסטנדרטי ל $V = \mathbb{F}^n$ הוא $B = \{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ ("וקטורי היחידה")

2. $V = \mathbb{C}^{3 \times 2}$ אזי

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס.

(המימד הוא $3 \cdot 2 = 6$)

בהכללה: הבסיס הסטנדרטי ל $V = \mathbb{F}^{m \times n}$ הוא $B = \{E_{i,j} | 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$ ("מטריצות היחידה")

3. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל. בסיס $B = \{1, x, x^2\}$ (מימד 2+1)

בהכללה הבסיס הסטנדרטי ל $V = \mathbb{F}_n[x]$ הוא $B = \{1, x, x^2, \cdots x^n\}$

4. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$. הבסיס $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4 \ldots\}$ הוא בסיס אינסופי.

5. לפי הגדרה, הבסיס למרחב האפס $\{0\}$ הוא הקבוצה הריקה $B = \emptyset$

הערה: $\{0\}$ **אינו** בסיס כי כל קבוצה המכילה את 0 היא תלויה לינארית