בס"ד

מבחן באלגברה ליניארית 1 תשע"ג סמסטר קיץ מועד ב

מרצה: ד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 1 (20 נקודות)

צטט והוכח את משפט הדרגה.

פתרון

תהיי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

נניח שדרגת העמודה היא k. נניח ש $\{b_1,b_2,...,b_k\}$ בסיס של מרחב העמודות של A.

נסמן $B=(b_1,b_2,...,b_k)\in\mathbb{F}^{m\times k}$.

מכיוון ש $\{b_1,b_2,...,b_k\}$ בסיס של מרחב העמודות של A ניתן לרשום כל עמודה ב A כקומבינציה ליניארית של $\{b_1,b_2,...,b_k\}$ $C_i(A)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}b_j$.

עבור מטריצה $C\in\mathbb{F}^{k\times n}$ המקיימת $c_{ij}=\alpha_{ji}$ נקבל ש

$$BC=\left(BC_1(C),BC_2(C),...,BC_n(C)\right)=\left(C_1(BC),C_2(BC),...,C_n(BC)\right)$$

$$BC_i(C)=B\begin{pmatrix}c_{1i}\\c_{2i}\\.\\.\\.\\c_{ki}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\alpha_{i1}\\\alpha_{i2}\\.\\.\\.\\\alpha_{ik}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}C_j(B)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}b_j=C_i(A).$$

סה"כ קיבלנו ש $A=BC$.

$$A=BC=\begin{pmatrix}R_1(B)C\\R_2(B)C\\.\\.\\.\\R_m(B)C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1(A)\\R_2(A)\\.\\.\\.\\R_m(A)\end{pmatrix}\Rightarrow R_i(A)=R_i(B)C=\sum_{j=1}^{k}b_{ij}R_j(C).$$

כל שורה ב A היא קומבינציה ליניארית של הקבוצה $\{R_i(C)\}_{i=1}^{k}$ ולכן המימד של מרחב השורות קטן או שווה ל k.

הוכחנו שלכל מטריצה A דרגת השורות קטנה או שווה לדרגת העמודות.

דרגת העמודות של המטריצה A שווה לדרגת השורות של המטריצה A^t שקטנה או שווה לדרגת העמודות של המטריצה A^t ששווה לדרגת השורות של המטריצה A ואז דרגת העמודות של מטריצה A קטנה או שווה לדרגת השורות.

מסקנה: דרגת העמודות שווה לדרגת השורות.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 2 (20 נקודות)

<u>סעיף א (10 נקודות)</u>

תהיינה A ו B מטריצות ריבועיות מאותו סדר,

כך שמתקיים $A^3 = I$ ו $BA = A(A+I)$.

i. הוכיחו כי $A^{-1} = A^2$.

ii. הוכיחו כי $B = A + I$.

iii. הוכיחו כי $BABA = A^2B^2$

<u>סעיף ב (10 נקודות)</u>

נסמן $T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

א. הוכח כי לכל α, β ממשיים מתקיים $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

ב. הוכח כי לכל α ממשי מתקיים $T_\alpha^{-1} = T_{-\alpha}$.

ג. תנו דוגמא למטריצה A 2×2, כך שמתקיים $A^6 = I$.

פתרון

<u>סעיף א</u>

i. $A^3 = A^2A = AA^2 = I \Rightarrow A^2 = A^{-1}$

ii.

$$BA = A(A+I) = A^2 + AI = A^2 + A$$
$$\Rightarrow BAA^{-1} = BI = B = \left(A^2 + A\right)A^{-1} = A^2A^{-1} + AA^{-1} = A + I$$

iii.

$$BABA = \left[A\left(A+I\right)\right]^2 = \left(A^2 + A\right)^2 + A^4 + 2A^3 + A^2 = A^2(A^2 + 2A + I) = A^2\left(A+I\right)^2 = A^2B^2$$

<u>סעיף ב</u>

.i

$$T_\alpha T_\beta=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}=$$

$$\left[\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \cos(a\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\right]$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=T_{\alpha+\beta}$$

.ii

נשתמש בנוסחה $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

ובכך ש $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha),\ \sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$

$$T_\alpha^{-1}=\frac{1}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{pmatrix}=T_{-\alpha}$$

.iii

ע"פ סעיף קודם מתקיים $T_\alpha^6=T_{6\alpha}$. לכן אם נבחר $\alpha=\frac{\pi}{3}$ אזי נקבל:

$$T_{\frac{\pi}{3}}^6=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}\cos 2\pi & -\sin 2\pi\\ \sin 2\pi & \cos 2\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי W קבוצת כל הפתרונות של מערכת המשוואות $Ax=0$.

כאשר $\mathbb{R}^{5\times5}\ni A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 3 & 2 & 0\\ 3 & 5 & 3 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 7 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

א. הוכח ש W תת מרחב של $\mathbb{R}^5$.

ב. מצא שני בסיסים שונים B_1,B_2 ל W כאשר

.i $(-3,0,1,4,0)\in B_1$.

.ii $(0,1,-1,-1,1)\in B_2$.

iii. $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

ג. מצא מטריצה P כך ש $P \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$.

ד. הראה שהווקטור $v = (3,-5,-2,4,4)$ שייך ל W, מצא את $[v]_{B_1}, [v]_{B_2}$ והראה שאכן $P \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$.

פתרון

א. מכיוון שהווקטור $(0,0,0,0,0)$ שייך ל W אז $W \neq \varnothing$.

נניח ש $v_1, v_2 \in W$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$.

מכיוון ש $v_1, v_2 \in W$ נקבל ש $Av_1 = Av_2 = 0$.

$A(v_1 + \alpha v_2) = Av_1 + A(\alpha v_2) = Av_1 + \alpha(Av_2) = 0$ ולכן $v_1 + \alpha v_2 \in W$ ו W תת מרחב של $\mathbb{R}^5$.

ב. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{\substack{3R_1-R_2\to R_2 \\ 3R_1-R_3\to R_3 \\ 2R_1-R_4\to R_4 \\ 5R_1-R_5\to R_5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 3 & -9 \end{pmatrix} \underset{\approx}{\substack{-R_2\to R_2 \\ 2R_2-R_3\to R_3 \\ R_2-R_4\to R_4 \\ 3R_2-R_5\to R_5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנים החופשיים הם: x_2, x_4, x_5.

נמצא בסיס B_1:

$$B_1 = \{(-1,1,0,0,0),(-3,0,1,4,0),(1,0,-3,0,4)\} \Leftarrow \begin{cases} x_2 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_3 = 0 \\ x_2 = 0, x_4 = 4, x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_3 = 1 \\ x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 4 \Rightarrow x_1 = 1, x_3 = -3 \end{cases}$$

נמצא בסיס B_2:

$$B_2 = \{(0,1,-1,-1,1),(-6,0,2,8,0),(2,0,-6,0,8)\} \Leftarrow \begin{cases} x_2 = 1, x_4 = -1, x_5 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_3 = -1 \\ x_2 = 0, x_4 = 8, x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -6, x_3 = 2 \\ x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 8 \Rightarrow x_1 = 2, x_3 = -6 \end{cases}$$

ג. נרשום את הווקטורים בבסיס B_1 כצירוף ליניארי של הווקטורים בבסיס B_2.

$$(-1,1,0,0,0) = 1\cdot(0,1,-1,-1,1) + \frac{1}{8}\cdot(-6,0,2,8,0) - \frac{1}{8}\cdot(2,0,-6,0,8)$$

$$(-3,0,1,4,0) = 0\cdot(0,1,-1,-1,1) + \frac{1}{2}\cdot(-6,0,2,8,0) + 0\cdot(2,0,-6,0,8)$$

$$(1,0,-3,0,4) = 0\cdot(0,1,-1,-1,1) + 0\cdot(-6,0,2,8,0) + \frac{1}{2}\cdot(2,0,-6,0,8)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ד.

$$[v]_{B_1}=(-5,1,1)\Leftarrow(3,-5,-2,4,4)=-5\cdot(-1,1,0,0,0)+1\cdot(-3,0,1,4,0)+1\cdot(1,0,-3,0,4)$$

$$[v]_{B_2}=\left(-5,-\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right)\Leftarrow(3,-5,-2,4,4)=-5\cdot(0,1,-1,-1,1)-\frac{1}{8}\cdot(-6,0,2,8,0)+\frac{9}{8}\cdot(2,0,-6,0,8)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{8}&\frac{1}{2}&0\\ -\frac{1}{8}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-\frac{1}{8}\\ \frac{9}{8}\end{pmatrix}$$

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 4 (20 נקודות)

<u>סעיף א (15 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}x-\alpha y+z=1\\(\alpha-1)x+(2-\alpha^2)y+2\alpha z=2\\(1-\alpha)x+(1-\alpha^2)y+(\alpha-1)z=0\end{cases}.$$

לאילו ערכי α למערכת הבאה:

i. יש פתרון יחיד.

ii. אין פתרונות.

iii. יש יותר מפתרון אחד (רשמו במקרה זה את הפתרון הכללי)

<u>סעיף ב (5 נקודות)</u>

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix}3&3&3&0&3&3\\0&2&2&0&2&0\\1&1&1&1&1&1\\0&0&4&0&0&0\\0&0&5&0&5&0\\0&6&6&0&6&6\end{pmatrix}$$

פתרון

<u>סעיף א</u>

נבדוק לאילו ערכי α הדטרמיננטה $\begin{vmatrix}1&-\alpha&1\\ \alpha-1&2-\alpha^2&2\alpha\\ 1-\alpha&1-\alpha^2&\alpha-1\end{vmatrix}$ שונה מאפס.

נבצע פעולות שורה אלמנטאריות שלא משנות את הערך של הדטרמיננטה.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ \alpha-1 & 2-\alpha^2 & 2\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha^2 & \alpha-1 \end{pmatrix} \overset{\substack{-(\alpha-1)R_1+R_2\to R_2 \\ -(1-\alpha)R_1+R_3\to R_3}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & 2-\alpha & \alpha+1 \\ 0 & 1+\alpha-2\alpha^2 & 2\alpha-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ \alpha-1 & 2-\alpha^2 & 2\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha^2 & \alpha-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & 2-\alpha & \alpha+1 \\ 0 & 1+\alpha-2\alpha^2 & 2\alpha-2 \end{vmatrix} = (2-\alpha)(2\alpha-2)-(\alpha+1)\left(1+\alpha-2\alpha^2\right)=$$

$$(4-2\alpha)(\alpha-1)-(\alpha+1)(\alpha-1)(-2\alpha-1)=(\alpha-1)\left[(4-2\alpha)-(\alpha+1)(-2\alpha-1)\right]=$$

$$(\alpha-1)\left(2\alpha^2+\alpha+5\right)$$

כאשר $\alpha\neq 1$ יש פתרון יחיד למערכת.

אם $\alpha=1$ נקבל את המערכת $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 0\cdot x+y+2z=2 \end{cases}$ נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית המתאימה $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 0\cdot x+y+2z=0 \end{cases}$ המשתנה החופשי הוא z.

נציב $z=1$ ונקבל $y=-2, x=-3$ ולכן הפתרון הכללי הוא מהצורה $t(-3,-2,1)$.

$(0,0,1)$ הוא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית ולכן הפתרון הכללי הוא $(0,0,1)+t(-3,-2,1)$.

אין α שעבורו אין פתרון למערכת.

<u>סעיף ב</u>

נדרג את המטריצה בעזרת פעולות שורה כדי לקבל מטריצה משולשית עליונה.

$$\begin{pmatrix} 3&3&3&0&3&3 \\ 0&2&2&0&2&0 \\ 1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&4&0&0&0 \\ 0&0&5&0&5&0 \\ 0&6&6&0&6&6 \end{pmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&2&2&0&2&0 \\ 3&3&3&0&3&3 \\ 0&0&4&0&0&0 \\ 0&0&5&0&5&0 \\ 0&6&6&0&6&6 \end{pmatrix} \overset{-3R_1+R_3\to R_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&2&2&0&2&0 \\ 0&0&0&-3&0&0 \\ 0&0&4&0&0&0 \\ 0&0&5&0&5&0 \\ 0&6&6&0&6&6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-3R_2+R_6\to R_6}{\approx} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&2&2&0&2&0 \\ 0&0&0&-3&0&0 \\ 0&0&4&0&0&0 \\ 0&0&5&0&5&0 \\ 0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix} \overset{-\frac{5}{4}R_4+R_5\to R_5}{\approx} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&2&2&0&2&0 \\ 0&0&0&-3&0&0 \\ 0&0&4&0&0&0 \\ 0&0&0&0&5&0 \\ 0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix} \overset{R_3\leftrightarrow R_4}{\approx} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&2&2&0&2&0 \\ 0&0&4&0&0&0 \\ 0&0&0&-3&0&0 \\ 0&0&0&0&5&0 \\ 0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix}$$

נשים לב שבפעולת השורה אחמנטארית הראשונה החלפנו שורות ובפעולת שורה אלמנטארית האחרונה החלפנו שורות ולכן סה"כ ערך הדטרמיננטה של המטריצה הראשונה שווה לדטרמיננטה של המטריצה משולשית עליונה שהתקבלה.

מכפלת איברי האלכסון במטריצה משולשית עליונה נותן את הדטרמיננטה של המטריצה ולכן הדטרמיננטה היא -720.

שאלה 5 (20 נקודות)

ענו בפירוט בדף זה

<u>סעיף א (8 נקודות)</u>

האם $\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}\,\middle|\,AB=0\right\}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, כאשר $B=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&6\end{pmatrix}$?

אם כן הוכח (הסתמך על כך ש $\mathbb{R}^{2\times2}$ מרחב וקטורי והוכח בעזרת הקריטריון המקוצר) ומצא בסיס למרחב וקטורי.

אם לא תן דוגמא לאקסיומה שלא מתקיימת.

<u>סעיף ב (7 נקודות)</u>

האם $\left\{A\in\mathbb{R}^{4\times4}\,\middle|\,|A|=0\right\}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$?

אם כן, אין צורך להוכיח אך חשב את מימדו ואם לא תן דוגמא לאקסיומה שלא מתקיימת.

<u>סעיף ג (5 נקודות)</u>

רשום את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטאריות.

פתרון

<u>סעיף א</u>

נראה שהקבוצה $W=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times2}\,\middle|\,AB=0\right\}$ היא תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times2}$.

מכיון ש $0\cdot B=0$ נקבל ש $0\in W$ ו $W\neq\varnothing$.

נניח ש $A_1,A_2\in W$ כלומר $A_1B=A_2B=0$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$.

$(A_1+\alpha A_2)B=A_1B+(\alpha A_2)B=A_1B+\alpha(A_2B)=0$ ולכן $A_1+\alpha A_2\in W$.

נמצא בסיס למרחב וקטורי.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\-3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$a_{11}-3a_{12}=0$$

$$-2a_{11}+6a_{12}=0$$

$$a_{21}-3a_{22}=0$$

$$-2a_{21}+6a_{22}=0$$

נקבל את המערכת משוואות

$$a_{11}-3a_{12}+0\cdot a_{21}+0\cdot a_{22}=0$$

$$0\cdot a_{11}+0\cdot a_{12}+a_{21}-3a_{22}=0$$

יש שני משתנים חופשיים a_{12},a_{22}.

הבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\3&1\end{pmatrix}\right\}$

<u>סעיף ב</u>

הקבוצה הנ"ל לא מרחב וקטורי.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\in\left\{A\in\mathbb{R}^{4\times4}\,\middle|\,|A|=0\right\},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in\left\{A\in\mathbb{R}^{4\times4}\,\middle|\,|A|=0\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\notin\left\{A\in\mathbb{R}^{4\times4}\,\middle|\,|A|=0\right\}$$

<u>סעיף ג</u>

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

נגיע למטריצת היחידה בעזרת פעולות שורה אלמנטאריות

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\overset{\frac{1}{2}R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{-R_3+R_2\to R_2}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{-3R_3+R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$