

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מס': 8821105
מרצה: פרופ' מיכאל מגרל
תאריך: 10.9.07 מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים ותצי

השאלות:

5 מתוך 6

1. א. הסבר מדוע $(Map(N, N), \circ)$ מונויד. מצא בו אלמנט הפיך משמאל שלא הפיך מימין.
ב. תן דוגמה של אגודה סופית שהיא לא חבורה.
ג. הוכח שאם (X, \cdot) אגודה סופית עם אפשרות לצמצום (מימין ומשמאל) אז היא חבורה.
ד. תן דוגמה של 2 אגודות לא איזומורפיות עם 3 איברים.

2. (חבורת Heisenberg)
מעל קבוצה $H := \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ נגדיר פעולה
 $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1 + x_3 y_2, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
א. הוכח ש (H, \bullet) חבורה לא קומוטטיבית.
ב. הוכח שהיא איזומורפית לחבורת מטריצות הבאה (לגבי הכפל):

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

- ג. מצא תת חבורה לא נורמלית.
ד. מצא לפחות 3 תת חבורות נורמליות.

3. א. הוכח או הפרך: $70!+1$ מתחלק ב 71 . $116!+1$ מתחלק ב 117.
ב. בעזרת משפט Euler חשב 2 ספרות אחרונות של 2007^{2007} .
ג. הוכח או הפרך: $U_8 \cong U_{10}$.

- ד. כמה אוטומורפיזמים יש לחבורה $\langle cis \frac{\pi}{\sqrt{5}} \rangle$?

4. עבור $H \leq G$ נגדיר: $N(H) := \{g \in G : gH = Hg\}$
 ("נורמליזטור" של H ב- G).

הוכח:

- א. $N(H) = G \Leftrightarrow H \triangleleft G$ ו- $N(H) \leq G$.
 ב. $H \triangleleft N(H)$ ואם $H \triangleleft K \leq G$ אזי $K \leq N(H)$.
 ג. $|\{gHg^{-1} : g \in G\}| = [G : N(H)]$.
 ד. אם $K \leq H \triangleleft G$ ו- H ציקלית סופית אז $K \triangleleft G$.

4. א. הוכח משפט Caeley. האם כל תת חבורה סופית איזומורפית עם תת חבורה של חבורת מטריצות $GL_n(R)$?
 ב. הוכח או הפרך: $C^*/T \cong R$, $R/9Z \cong T$ (כאשר $T := \{z \in C \mid \|z\|=1\}$).
 ג. מצא תמונות אפימורפיות (עד כדי איזומורפיזם) של חבורת Euler U_{10} ושל Z_{21} .
 ד. מצא לפחות 4 חבורות שונות (עד כדי איזו') עם 8 אלמנטים.

6. א. הוכח משפט Sylow 1.
 ב. הוכח שהצמדה $g \circ A \mapsto gAg^{-1}$ מגדירה פעולה של G מעל קבוצה של תת חבורות $Sub(G)$.
 ג. מהיא קבוצת F של נקודות שבת?
 ד. בעזרת משפט Burnside מצא מספר ריבועים שונים (עד כדי D_4) אשר מתקבלים מריבוע נתון אם מותר לצבוע קודקודים ב 3 צבעים קבועים.

בהצלחה ושנה טובה !