תרגיל בית מס' 1 - אלגברה מתקדמת

2 בדצמבר 2016

תרגיל 1. עבור כל אחד מהמבנים האלגביים הבאים קבעו האם הוא חבורה, מונואיד, חבורה למחצה או חבורה.

1. $(2\mathbb{Z},+)$ -(שלמים הזוגיים עם חיבור)
2. $(2\mathbb{Z},\cdot)$- (שלמים זוגיים עם כפל)
3. $\left(\left\{A\in M_n\left(\mathbb{Z}\right)\middle|\det A\neq 0\right\},\cdot\right)$ - מטריצות שלמות שהדטרמינטנה שלהן לא מתאפסת, עם פעולת כפל מטריצות
4.)
5. $\left(A\in GL_n\left(\mathbb{R}\right)\middle|\det A\in\mathbb{Q}\right)$- מטריצות הפיכות עם דטרמיננטה רציונלית.
6. $\left(\left\{A\subseteq\mathbb{N}\middle||A|<\infty\right\},\cap\right)$ - תתי קבוצות סופיות של $\mathbb{N}$ עם פעולת חיתוך.
7. $(\mathbb{Z}^+,gcd)$- קבוצת כל המספרים הטבעיים עם פעולת מחלק משותף מקסימלי.

תרגיל 2. תהי $(G,*,e)$ חבורה. הוכיחו את התכונות הבאות.

1. **אם** $g,h\in G$. ומתקיים $gh=g$ **אזי** $h=e$.
2. **אם** $g,h,k\in G$ ומתקיים $gh=gk$ **אזי** $k=h$.
3. **אם** לכל $g,h\in G$ קיים k כך ש $g=hk$

תרגיל 3. בתרגיל הזה תתבקשו להוכיח עובדה שימושית מתורת המספרים, דהיינו ש $gcd\left(a,b\right)=m\cdot a+n\cdot b$ עבור מספרים שלמים m,n. (ביטוי כזה נקרא צירוף שלם).

הגדרה. יהיו m,n מספרים שלמים. אזי מחלק משותף מקסימלי שלהם,$gcd\left(m,n\right)$ מוגדר להיות המספר השלם המקסימלי שמחלק את שניהם.

הוכיחו את הטענות הבאות:

1. אם $d|a$ וגם $d|b$ אזי $d|mb+na$ לכל m ו n.
2. אם $a \mod b = q$ אזי אם $d|a$ ו $d|b$ אזי $d|q$. (לפתוח את ההגדרה ולהשתמש בסעיף הקודם).
3. אם $d|a \mod b$ וגם $d|b$ אזי $d|a$.
4. משני הסעיפים הקודמים הסיקו את המשפט הבא. $gcd\left(a,b\right)=gcd\left(b,a \mod b\right)$,
5. נגדיר את אלגוריתם אוקלידס באופן רקורסיבי:

$$gcd(a,b)=\begin{cases} a & b=0 \\ gcd\left(b,a \mod b\right) & b\neq 0 \end{cases}$$

הוכיחו שהאלגוריתם אכן מייצר את ה $gcd(a,b)$.

6. הראו שבכל שלב של האלגוריתם הביטויים הם צירופים שלמים של a ו b. הסיקו את המשפט שרצינו להוכיח.

תרגיל 4. תהי G חבורה, $H\leq G$ תת חבורה. לכל $g\in G$ נגדיר את הקוסט השמאלי gH על ידי $gH=\{gh|h\in H\}$ ואת הקוסט הימני Hg על ידי $Hg=\{hg|h\in H\}$. הוכיחו את הטענות הבאות.

1. יהי $h\in H$. חשבו את הקוסטים hHו Hh.
2. לכל $g\in G$ נגדיר את הפונקציות

$$l_g:H\to gH$$
$$r_g:H\to Hg$$

על ידי $l_g\left(h\right)=gh$ ו $m_g\left(h\right)=hg$. הוכיחו ש l_g ו m_g הן חח"ע ועל. הסיקו שהעוצמה של כל קוסט של H שווה לעוצמה של H.

3. הוכיחו שאם הקוסטים השמאליים g_1H ו g_2H אינם שווים $g_1H\neq g_2H$ אזי הם זרים, כלמר $g_1H\cap g_2H=\emptyset$.
4. הוכיחו את אותה הטענה עבור קוסטים ימניים.
5. הוכיחו שהיחס $\sim$ המוגדרת על ידי $g\sim k\Leftrightarrow gH=kH$ הוא יחס שקילות. (הסימון אקראי...).
6. הגדירו יחס דומה עבור קוסטים ימניים.
7. הוכיחו שלכל $g\in G$ קיים קוסט kH כך ש $g\in kH$.
8. תהי $H\leq G$ תת-חבורה. הוכיחו שמתקיים Gהיא איחוד זר של קוסטים שמאליים של H.

הערה. אומרים ש A הוא איחוד זר של קבוצות $A_1,\ldots,A_k$ אם מתקיים

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}A_k$$
$$.i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$$

9. הסיקו את המשפט הבא: אם G סופית אזי $|H||G|$.

תרגיל 5. תהיינה $(G_1,*_1),(G_2,*_2)$ חבורות. נגדיר פעולה $G_1\times G_2$ על ידי $(g_1,g_2)*(h_1,h_2)=(g_1h_1,g_2h_2)$. האם זאת חבורה?