# מבוא לאלגברה לינארית

## תרגיל 8- פתרון

**1.** פתרו את המערכות הבאות ע"י שימוש בכלל קרמר:

א. $$\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3+x_4=5 \\ 3x_1+6x_2-2x_3+x_4=8 \\ x_1+x_2-3x_3-4x_4=-1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-3x_4=2 \end{cases}$$

**פתרון:**

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \underset{=}{\begin{matrix} R_1-2R_3\to R_1 \\ R_2-3R_3\to R_2 \\ R_4-2R_3\to R_4 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 11 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 11 & 9 \\ 3 & 7 & 13 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{R_2+3R_1\to R_2} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 9 \\ 0 & 40 & 40 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 40 & 40 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 120$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1+5R_3\to R_1 \\ R_2+8R_3\to R_2 \\ R_4+2R_3\to R_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 6 & -10 & -19 \\ 0 & 14 & -26 & -31 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & -11 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -10 & -19 \\ 14 & -26 & -31 \\ 4 & -4 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{C_1+C_2\to C_1} (-1)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -10 & -19 \\ -12 & -26 & -31 \\ 0 & -4 & -11 \end{vmatrix} \underset{=}{-R_1\to R_1} \begin{vmatrix} 4 & 10 & 19 \\ -12 & -26 & -31 \\ 0 & -4 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{R_2+3R_1\to R_2} \begin{vmatrix} 4 & 10 & 19 \\ 0 & 4 & 26 \\ 0 & -4 & -11 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 26 \\ -4 & -11 \end{vmatrix} = 4(-44+104)=240$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_4 \to R_1 \\ R_2 - 3R_3 \to R_2 \\ R_4 - 2R_3 \to R_4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 11 & 7 & 13 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 11 & 7 & 13 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_1 - C_2 \to C_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 13 \\ -4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_3 \to R_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 15 & 18 \\ -4 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 15 & 18 \end{vmatrix} = -4(54 - 60) = 24$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_4 \to R_1 \\ R_2 - 3R_3 \to R_2 \\ R_4 - 2R_3 \to R_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 11 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 13 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$3R_1 + R_2 \to R_2 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 20 & 25 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 20 & 25 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_4 \to R_1 \\ R_2 - 3R_3 \to R_2 \\ R_4 - 2R_3 \to R_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 11 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$R_2 + 3R_1 \to R_2 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 16 & 20 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 16 & 20 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 96$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{240}{120} = 2 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{120} = 0$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} \qquad x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$$

**ב.**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

**פתרון:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_4 - R_1 \to R_4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} C_2 + C_3 \to C_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ = \end{matrix} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_3 \leftrightarrow R_4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-2) = 8$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_4 \to R_4 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_4 \to R_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 - R_2 \to R_1 \\ = \end{matrix} (-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_4 \to R_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 + R_1 \to R_3 \\ = \end{matrix} (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 + R_4 \to R_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_3 + R_1 \to R_3 \\ = \end{matrix} \quad (-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)\cdot 2 \cdot (-2) = -8$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{0}{8} = 0 \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{16}{8} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-8}{8} = -1 \qquad x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-8}{8} = -1$$

**2.** בדקו האם המטריצות הבאות ניתנות ללכסון .

אם כן , מצאו את המטריצה המלכסנת $P$ ואת המטריצה האלכסונית $D$ המתאימה :

**א.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**פתרון:**

נמצא את הע"ע-ים :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\big((4-\lambda)(1-\lambda)+2\big) =$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = 0$$

$\Leftarrow \lambda_1 = 1 \, , \lambda_2 = 2$ ו- $\lambda_3 = 3$

- נמצא וקטור עצמי המתאים ל $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_3 \to R_3 \\ R_1 + \tfrac{3}{2} R_2 \to R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -\tfrac{1}{2} R_2 \to R_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{matrix} z = 0 \\ x = 0 \\ y = t \end{matrix}$$

ניקח $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו"ע של $\lambda_1 = 1$ .

- נמצא וקטור עצמי המתאים ל $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} R_1 + R_3 \to R_3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 + R_1 \to R_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \tfrac{1}{2} R_1 \to R_1 \\ -R_2 \to R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{matrix} z = t \\ x = -\tfrac{1}{2} t \\ y = t \end{matrix}$$

ניקח $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ו"ע של $\lambda_2 = 2$ .

- נמצא וקטור עצמי המתאים ל $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} 2R_1 + R_3 \to R_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -\tfrac{1}{2} R_2 \to R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_2 - R_1 \to R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left\{t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}\quad\begin{matrix}z=t\\x=-t\\y=t\end{matrix}$$

ניקח $\underline{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ו"ע של $\lambda_3=3$ .

$P=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ המטריצה המלכסנת , $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

**ב.** $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&-4&5\\0&-2&3\end{pmatrix}$

**פתרון:**

נמצא את הע"ע-ים :

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-2\\0&-4-\lambda&5\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-4-\lambda&5\\-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left(-12+4\lambda-3\lambda+\lambda^2+10\right)=$$
$$=(1-\lambda)\left(-2+\lambda+\lambda^2\right)=0$$

$\Leftarrow$ $\lambda_1=1$ , $\lambda_2=1$ ו- $\lambda_3=-2$

- נמצא וקטורים עצמיים המתאימים ל $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&-5&5\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&-5&5\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{matrix}R_2-5R_1\to R_2\\R_3-2R_1\to R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&0&15\\0&0&6\end{pmatrix}R_3-\frac{6}{15}R_2\to R_3\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&0&15\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}\quad\begin{matrix}x=t\\z=0\\y=0\end{matrix}$$

לערך עצמי $\lambda_1=1$ יש רק וקטור עצמי אחד , כלומר הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_1=1$ שווה 1 והריבוי האלגברי שלו שווה 2 ולכן המטריצה לא ניתנת ללכסון (אין מספיק וקטורים עצמיים בת"ל)

**ג.** $A=\begin{pmatrix}5&3&-2\\-12&-8&6\\-4&-3&3\end{pmatrix}$

**פתרון:**

נמצא את הע"ע-ים :

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda&3&-2\\-12&-8-\lambda&6\\-4&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=-2+3\lambda-\lambda^3=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

$\Leftarrow$ $\lambda_1=1$ , $\lambda_2=1$ ו- $\lambda_3=-2$

- נמצא וקטור עצמי המתאים ל $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix}4&3&-2\\-12&-9&6\\-4&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&3&-2\\-12&-9&6\\-4&-3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}R_2+3R_1\to R_2\\R_3+R_1\to R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}4&3&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left\{k\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}\quad \begin{aligned}z&=t\\y&=k\\x&=-\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}t\end{aligned}$$

ניקח $\underline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\underline{v}_1=\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$ ו"ע-ים של $\lambda_1=1$ .

- נמצא וקטור עצמי המתאים ל $\lambda_3=-2$

$$\begin{pmatrix}7&3&-2\\-12&-6&6\\-4&-3&5\end{pmatrix}R_3-\frac{1}{3}R_2\to R_3\begin{pmatrix}7&3&-2\\-12&-6&6\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{12}R_2\to R_2\begin{pmatrix}7&3&-2\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-1&3\end{pmatrix}R_1\leftrightarrow R_2\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\7&3&-2\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

$$R_2-7R_1\to R_2\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&-1&3\end{pmatrix}R_3-\frac{1}{2}R_2\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\left\{t\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}\quad \begin{aligned}z&=t\\y&=3t\\x&=-t\end{aligned}$$

ניקח $\underline{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ ו"ע של $\lambda_3=-2$ .

$P=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\4&0&3\\0&2&1\end{pmatrix}$ המטריצה המלכסנת , $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

**3.** חשבו את $A^6$ כאשר $A=\begin{pmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$ (מטריצה מסעיף א' של שאלה 2)

**פתרון:**

המטריצה המלכסנת של $A=\begin{pmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$ היא $P=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$$

ולכן $A=\begin{pmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$

$$A^6=\begin{pmatrix}4&0&1\\-2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}^6=PD^6P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&64&0\\0&0&729\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1394&0&665\\-1330&1&602\\-1330&0&-601\end{pmatrix}$$

**4.** מצאו את $\det A$, $adj\,A$ ואת $A^{-1}$ אם היא קיימת:

**א.** $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\1&2&1\\-1&-9&-6\end{pmatrix}$

**פתרון:**

$\det A=-36+1+18-(4-27+6)=0$ ולכן המטריצה אינה הפיכה.

נמצא את הצמודה הקלאסית (adjoint)

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -9 & -6\end{vmatrix}=-12+9=-3 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -9 & -6\end{vmatrix}=-(6-18)=12 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1+4=3$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -6\end{vmatrix}=-(-6+1)=5 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & -6\end{vmatrix}=-18-2=-20 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(3+2)=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -9\end{vmatrix}=-9+2=-7 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -9\end{vmatrix}=-(-27-1)=28 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6+1=7$$

$$adjA=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 12 & 3\\ 5 & -20 & -5\\ -7 & 28 & 7\end{pmatrix}$$

**ב.** $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

**פתרון:**

$\det A=-2+0+6-(3+0+2)=-1\neq 0$ ולכן המטריצה הפיכה

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-0=-1 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(2-6)=4 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0+3=3$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(1-0)=-1 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2+3=5 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(0-3)=3$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(4+2)=-6 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-2=-4$$

$$adjA=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}adjA=-\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

**ג.**
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**פתרון:**

$\det A=1\neq 0$ ולכן המטריצה הפיכה.

$$adjA=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}adjA=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$