

תרגיל 3 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות:

$$f(z) = x^3 + iy^3 \quad (\text{א})$$

$$f(z) = z + \operatorname{Re}(z) \quad (\text{ב})$$

$$f(z) = x^3 + y^5 \quad (\text{ג})$$

2. תהי $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x+y) - iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x)

3. מצאו פונקציה $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.
רמז: אם $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ אפשר לנסות לחפש u, v מהצורה

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y), \quad v(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$$

4. תהי $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב \mathbb{C} המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.

$$\text{רמז: הגדירו } g(z) = (f(z))^2$$

5. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \bar{z}e^{-17z^2}$ גזירה.

6. הוכיחו כי

$$|e^z| \leq e^{|z|} \quad (\text{א})$$

(ב) מתקיים שוויון אם ורק אם z ממשי אי שלילי.

7. פתרו את המשוואה $e^{e^z} = 1$.