

תרגיל בית מספר 9

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדב

1. תהי X קבוצה לא ריקה. נאמר כי קבוצה $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ היא מסנן (filter) מעל X אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

א. $\mathcal{F} \neq \emptyset$

ב. $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ג. $\forall A, B \in \mathcal{F} (A, B \in \mathcal{F} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{F})$

ד. $\forall A, B \in P(X) (A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B \rightarrow B \in \mathcal{F})$

דוגמה: עבור $X = \{1, 2, 3\}$, אם ניקח $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, אזי \mathcal{F} היא מסנן מעל X .

ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: לכל קבוצה לא ריקה X , קיים מסנן \mathcal{F} מעל X מקסימלי ביחס להכלה.
 ב. יהי \mathcal{F} מסנן מקסימלי ביחס להכלה מעל X , הוכיחו כי לכל $B \subseteq X$ מתקיים $B \in \mathcal{F}$ או $B^c \in \mathcal{F}$.
 רמז: הניחו בשלילה וסתרו את המקסימליות של \mathcal{F} .

2. מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1001$ כאשר x_i (עבור $1 \leq i \leq 5$) הם:
 (א) מספרים שלמים אי-שליליים.
 (ב) מספרים טבעיים אי-זוגיים.

3. מצאו כמה מספרים עשרוניים, בעלי 20 ספרות לכל היותר, הם בעלי סכום ספרות:
 (א) 9 בדיוק.
 (ב) 9 לכל היותר.
 (ג) 18 בדיוק.

4. מספר n יקרא חופשי מריבועים אם לא קיים $k \geq 2$ טבעי כך ש- $k^2 | n$. מצאו כמה מספרים חופשיים מריבועיים יש בין 1 ו-120.

בהצלחה!