אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 6

15 בינואר 2019

1. בדקו האם הפונקציות הבאות גזירות, ואם כן מצאו את הנגזרת:

(א) $f(x+yi) = \cos x \cos y + \sin x \sin yi$

(ב) $f(x+yi) = xy + \frac{y^2-x^2}{2}i$

<u>**פתרון:**</u>

א. נבדוק קושי רימן: $U(x,y) = \cos x \cos y, V(x,y) = \sin x \sin y$, לכן:

$$U_x = -\sin x \cos y, U_y = -\cos x \sin y$$

$$V_x = \cos x \sin y, V_y = \sin x \cos y$$

וכיון ש $U_x \neq V_y$ נקבל שהפונקציה לא גזירה.

ב. $U(x,y) = xy, V(x,y) = \frac{y^2-x^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$, ולכן:

$$U_x = y, U_y = x$$

$$V_x = -x, V_y = y$$

תנאי קושי רימן מתקיימים: $U_x = V_y, U_y = -V_x$, ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא:

$$f'(x+yi) = U_x + V_x i = y - xi$$

2. תהי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה גזירה. כידוע, יש $U,V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך ש־

$$f(x+yi) = U(x,y) + V(x,y)i$$

הוכיחו שאם V פונקציה קבועה אז f קבועה גם (במילים: אם החלק המדומה של f קבוע, אז f קבועה).

<u>פתרון:</u>

f גזירה, ולכן מתקיימות משוואות קושי רימן. כלומר מתקיים: $U_x = V_y, U_y = -V_x$.
כעת, כיון שנתון לנו ש־V פונקציה קבועה (נניח $V = c_1$) לכן נגזרתה אפס, ולכן: $U_x = V_y = 0, U_y = -V_x = 0$, ולכן גם U קבועה (נניח $U = c_2$). בסה"כ נקבל: $f = U + iV = c_2 + ic_1$ פונקציה קבועה.

3. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

(א) e^{1+2i}

(ב) $e^{5\text{cis}\pi}$

(ג) $\sin(1+i)$

(ד) $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6})$

(ה) $\ln(3-4i)$

(ו) $e\text{cis}\frac{\pi}{4}^{1-i}$

<u>פתרון:</u>

א. $e^{1+2i} = e^1\text{cis}2 = e\text{cis}2$.

ב. $e^{5\text{cis}\pi} = e^{-5}$.

ג. $\sin(1+i) = \frac{e^{2+2i}-e^{-2-2i}}{2i} = \frac{e^2\text{cis}2-e^{-2}\text{cis}(-2)}{2i} = \frac{e^2\cos 2+e^2\sin 2\cdot i-e^{-2}\cos 2+e^{-2}\sin 2\cdot i}{2i}$.
כעת נקבץ ממשיים ומדומים, וניזכר ש $\frac{1}{i} = -i$: לכן נקבל: $\sin 2\frac{e^2+e^{-2}}{2} + \cos 2\frac{e^{-2}-e^2}{2}i$.

ד. $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6}) = \frac{e^{2\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}+e^{-2\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{4\text{cis}\frac{\pi}{6}}+e^{4\text{cis}\frac{7\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{2\sqrt{3}+2i}+e^{-2\sqrt{3}-2i}}{2} = \frac{e^{2\sqrt{3}}\text{cis}2+e^{-2\sqrt{3}}\text{cis}(-2)}{2}$. נדלג ישר לקיבוץ איברים דומים ולצורה הקרטזית: $= \frac{\cos 2(e^{2\sqrt{3}}+e^{-2\sqrt{3}})+i\sin 2(e^{2\sqrt{3}}-e^{-2\sqrt{3}})}{2} = \cos 2\frac{e^{2\sqrt{3}}+e^{-2\sqrt{3}}}{2}+\sin 2\frac{e^{2\sqrt{3}}-e^{-2\sqrt{3}}}{2}i$.

ה. $\ln(3-4i) = \ln(5\text{cis}-0.927) = \ln 5 + -0.972i$.

ו. $e\text{cis}\frac{\pi}{4}^{1-i} = e^{(1-i)\ln(e\text{cis}\frac{\pi}{4})} = e^{(1-i)(\ln e+\frac{\pi}{4}i)} = e^{1+\frac{\pi}{4}+(\frac{\pi}{4}-1)i} = e^{1+\frac{\pi}{4}}\text{cis}(\frac{\pi}{4}-1)$.

4. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):

(א) $\sin(\overline{z}) = \overline{\sin(z)}$.

(ב) $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$.

(ג) אם $z \neq 0$ ואיננו ממשי שלילי אז: $\overline{z}^{\overline{w}} = \overline{z^w}$. הדרכה: תשאירו את z, w כמות שהם ואל תרשמו אותם בצורה קרטזית או פולרית. תלכו לפי הגדרת החזקה המרוכבת.

<u>פתרון:</u>

א. $\sin(\overline{z}) = \frac{e^{2\overline{z}}-e^{-2\overline{z}}}{2i} = \frac{e^{\overline{2z}}-e^{\overline{-2z}}}{2i}$. כעת, כיון שראינו בתרגול ש $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ נוכל להמשיך: $= \frac{\overline{e^{2z}}-\overline{e^{-2z}}}{2i} = \frac{\overline{e^{2z}-e^{-2z}}}{2i}$. כדי שגם במכנה תהיה הצמדה נרשום: $\overline{-2i} = 2i$ ונקבל: $= \frac{\overline{e^{2z}-e^{-2z}}}{\overline{-2i}} = \overline{\left(\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{2i}\right)} = \overline{\sin(z)}$.

ב. באופן דומה: $\cos(\overline{z}) = \frac{e^{2\overline{z}}+e^{-2\overline{z}}}{2} = \frac{e^{\overline{2z}}+e^{\overline{-2z}}}{2} = \frac{\overline{e^{2z}}+\overline{e^{-2z}}}{2} = \frac{\overline{e^{2z}+e^{-2z}}}{\overline{2}} = \overline{\left(\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}\right)} = \overline{\cos(z)}$.

ג. לפי הגדרת החזקה המרוכבת: $z^w = e^{w\ln z}$. לכן נקבל: $\overline{z}^{\overline{w}} = e^{\overline{w}\ln\overline{z}}$. ראינו בתרגול שלכל מרוכב z שאינו ממשי שלילי מתקיים $\ln\overline{z} = \overline{\ln z}$, לכן נקבל אצלנו: $= e^{\overline{w}\cdot\overline{\ln z}} = e^{\overline{w\ln z}}$, ועכשיו נשתמש בעובדה ש $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ ונקבל: $= \overline{e^{w\ln z}} = \overline{z^w}$.

בהצלחה!